Tartalomjegyzék

1. Egyenletes eloszlás

soltivalfolyt10 [SOLTVA]
Egy pálcát véletlenszerűen kettétörünk. Jelöljük a pálca végponjait A-val és B-vel, a töréspontot Q-val.
a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a Q pont közelebb lesz A-hoz, mint B-hez?
b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a törés után az egyik szakasz legalább kétszer akkora lesz, mint a másik?

soltivalfolyt20 [SOLTVA]
Egy pálcát véletlenszerűen három részre törünk. Jelöljük a pálca végponjait A-val és B-vel, a töréspontokat Q-val és R-rel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a törés után a három szakaszból háromszög szerkeszthető?

Megoldás
Tekintsük úgy, hogy Q és R választása az AB szakaszon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással történik. Felveszünk egy számegyenest, amelyen A a 0-nak, B az 1-nek, Q és R az x, y számoknak felel meg ($x, y \in [0;1]$). Ekkor a $P(x;y)$ pont a $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$ csúcsok által kifeszített egységnégyzetben egyenletes eloszlású.

Amennyiben $x > y$, azaz P az egységnégyzet $y = x$ egyenese „alatt” helyezkedik el, akkor a három létrejött szakasz hossza

$$y, \qquad (x-y), \qquad (1-x).$$

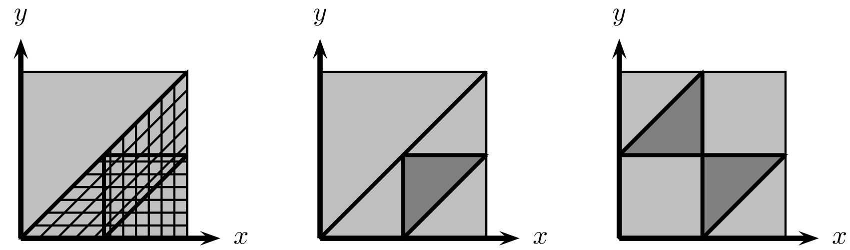
A háromszög-egyenlőtlenségek ebben az esetben:

$$y+(x-y) > 1-x, \qquad (1-x)+y > x-y, \qquad (x-y)+(1-x) > y,$$

azaz

$$x > \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2} > x-y, \qquad \frac{1}{2} > y.$$

Ezeknek a feltételeknek rendre az alábbi bal oldali ábrán függőlegesen, vízszintesen, haránt csíkozott részek felelnek meg, tehát egyesítésüknek a középső ábra. Az $x \leq y$ esetet hasonlóan vizsgálva kapjuk meg az összes megfelelő $P(x;y)$ pontot, melyek halmazát az alábbi jobb oldali ábrán sötétszürkével jelöltük.



A sötétszürke rész területe az egységnégyzet területének negyede, tehát $\frac{1}{4}$ annak valószínűsége, hogy a három részből szerkeszthető háromszög.

soltivalfolyt30 [SOLTVA]

Két személy megbeszéli, hogy de. 10 és 11 óra között találkoznak. érkezésük ezen időszak közben véletlenszerű. Mi annak a valószínűsége, hogy az előbb jövőnek nem kell negyed óránál többet várnia?

soltivalfolyt40

A $[0;1]$ intervallumon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással vesszük fel a Q és az R pontot. Határozzuk meg minden $d \in [0;1]$ számra annak valószínűségét, hogy

a) a QR szakasz hossza legfeljebb d;

b) ha a $[0;1]$ intervallumot a Q, R pontoknál „elvágjuk", akkor a kapott három szakasz *mindegyike legfeljebb* d hosszúságú;

c) a b)-ben említett három szakasz *között van legfeljebb* d hosszúságú;

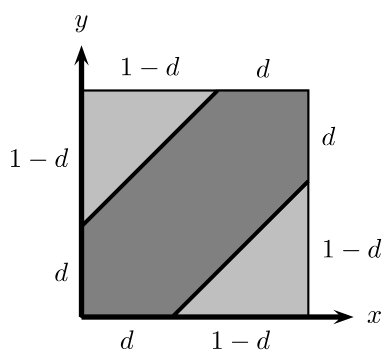
d) a b)-ben említett három szakasz *mindegyike legalább* d hosszúságú!

a) megoldása

Ha Q és R az x, y számoknak felel meg ($x, y \in [0;1]$), akkor a $P(x;y)$ pont a $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$ csúcsok által kifeszített egységnégyzetben egyenletes eloszlású. Az $|RQ| \leq d$ feltétel a

$$-d \leq y - x \leq d$$

egyenlőtlenség-rendszernek felel meg. Az ezeknek megfelelő P pontok halmaza az alábbi ábrán sötétszürkével jelölt tartomány.



E tartomány területének komplementere egy $(1-d)$ oldalú négyzettel egyenlő területű. A keresett valószínűség d függvényében:

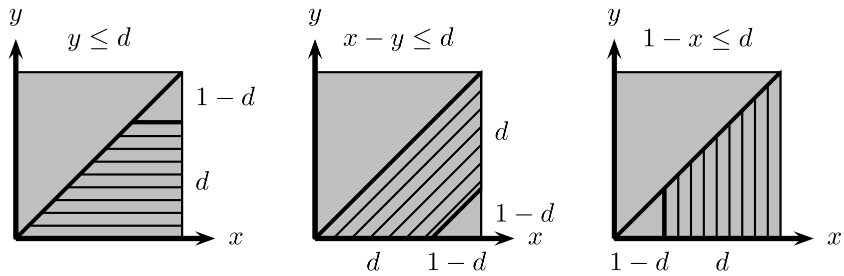
$$F(d) = 1 - (1-d)^2 = 2d - d^2.$$

b) megoldása

Ha $x > y$, azaz P az egységnégyzet $y = x$ egyenese „alatt” helyezkedik el, akkor a három létrejött szakasz hossza y, $(x-y)$, $(1-x)$, tehát a feltételek:

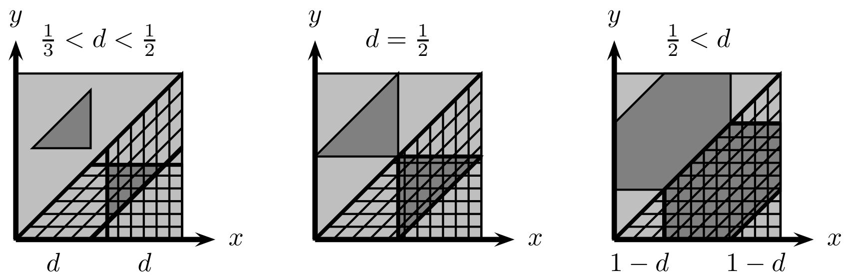
$$y \le d, \qquad x - y \le d, \qquad 1 - x \le d.$$

Az ezeknek megfelelő tartományok az alábbi ábrán láthatók.



E három rész közös részét kell tekintenünk.

A közös rész üres, ha $d < \frac{1}{3}$. Valóban, a három rész közül legalább az egyik legalább $\frac{1}{3}$ hosszú. De még $d = \frac{1}{3}$ esetén is csak egyetlen közös pont van. A $\frac{1}{3} < d < \frac{1}{2}$ tartományban a közös rész háromszög alakú, míg $\frac{1}{2} < d$ esetén egy hatszöget kapunk.



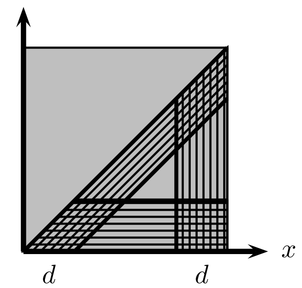
Nyilvánvaló, hogy $x < y$ esetére kapott megfelelő tartományok a most kapott részek tükörképei az $y = x$ egyenesre. Az $x = y$ esemény 0 valószínűségű, ezzel külön nem kell foglalkozni.

Tehát a keresett valószínűség d függvényében:

$$F(d) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad d \le \frac{1}{3} \\ (3d-1)^2, & \text{ha} \quad \frac{1}{3} < d \le \frac{1}{2} \\ 1 - 3(1-d)^2, & \text{ha} \quad \frac{1}{2} < d \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < d \end{cases}$$

c) megoldása

A b) feladathoz hasonlóan külön vizsgáljuk az $x > y$, $x < y$ eseteket. Az $x > y$ esetben a b) feladatnál már meg is állapítottuk a létrejövő szakaszok hosszát és felrajzoltuk az egységnégyzetben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre az egyes szakaszok hossza legfeljebb d. Míg b)-ben a három halmaz metszetét vizsgáltuk, most a három halmaz egyesítése érdekes.



Világos, hogy $\frac{1}{3} \leq d$ esetén az egyesítés a teljes egységnégyzet, azaz biztosan van olyan szakasz a három közül, amelynek hossza legalább d. A $\frac{1}{3} < d$ esetben a három tartomány egyesítésének komplementere egy $(1-3d)$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög komplementere. Az ezzel szimmetrikus $x < y$ esetet is figyelembe véve a keresett valószínűség:

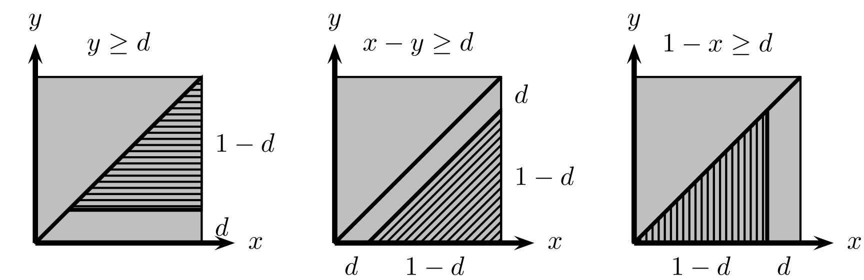
$$F(d) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad d \leq 0 \\ 1-(1-3d)^2, & \text{ha} \quad 0 \leq d \leq \frac{1}{3} \\ 1, & \text{ha} \quad \frac{1}{3} \leq d \end{cases}$$

d) megoldása

Most is csak az $x > y$ esetet elemezzük, az $x < y$ eset ezzel analóg. A b) feladatrészben megkaptuk a létrejövő szakaszok hosszát, de most az

$$y \geq d, \qquad x - y \geq d, \qquad 1 - x \geq d$$

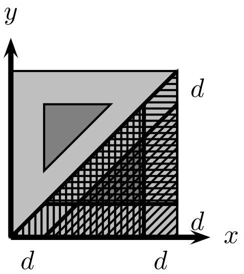
relációk mindegyikének megfelelő $P(x;y)$ pontokat keressük. Az egyes feltételeknek megfelelő tartományok az alábbi ábrán láthatók.



E három rész közös részét kell tekintenünk.

A közös rész üres, ha $d > \frac{1}{3}$. Valóban, nem lehet mind a három rész $\frac{1}{3}$-nál hosszabb. De még $d = \frac{1}{3}$ esetén is csak egyetlen közös pont van.

A $\frac{1}{3} > d$ tartományban a közös rész az alábbi ábrán látható egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek befogója $(1-3d)$.



Az ezzel szimmetrikus $x < y$ esetet is figyelembe véve a keresett valószínűség d függvényében:

$$F(d) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad d \le 0 \\ (1-3d)^2, & \text{ha} \quad 0 \le d \le \frac{1}{3} \\ 0, & \text{ha} \quad \frac{1}{3} < d \end{cases}$$

egyelosszel

Az x, y, z számokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk a $[0; 1]$ intervallumon. Határozzuk meg az alábbi valószínűségi változók eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

a) $|x-y|$, **b)** $\frac{x+y}{2}$, **c)** $\frac{x+y+z}{3}$,
d) xy, **e)** $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

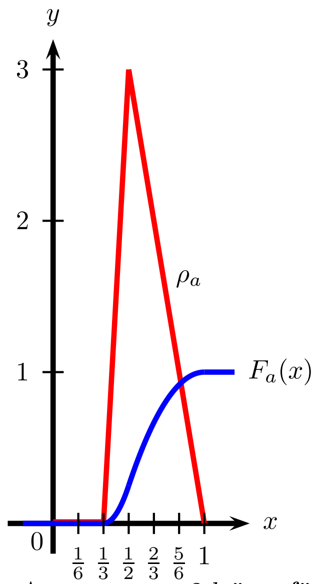
Eredmények

a) Ennek a valószínűségi változónak a soltivalfolyt40 b) feladatban határoztuk meg az eloszlásfüggvényét:

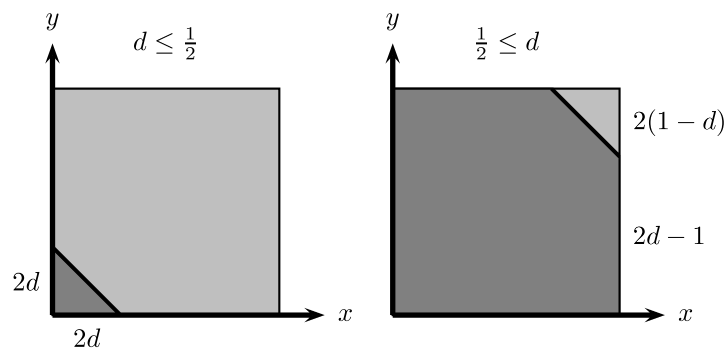
$$F_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad d \le \frac{1}{3} \\ (3x-1)^2, & \text{ha} \quad \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \\ 1-3(1-x)^2, & \text{ha} \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja:

$$\rho_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad d \le \frac{1}{3} \\ 6(3x-1), & \text{ha} \quad \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \\ 6(1-x), & \text{ha} \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0, & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$$



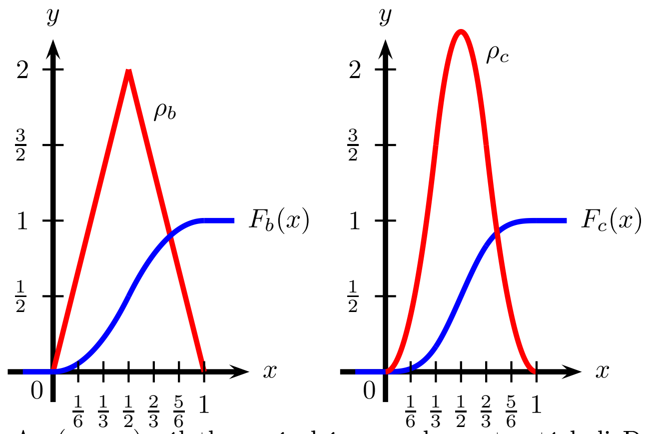
b) Az $x + y = 2d$ összefüggés a koordinátarendszer egy egyenesén, az $x + y \leq 2d$ reláció $0 \leq d$ esetén egy origót tartalmazó zárt félsíkon teljesül. A $P(x; y)$ pont az $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 1)$ csúcsok által kifeszített egységnégyzet egy pontja, a fent említett félsíknak ezzel az egységnégyzettel való közös részének területét kell meghatároznunk. Míg $d \leq \frac{1}{2}$ esetén ez a közös rész egy $2d$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög, addig $d \geq \frac{1}{2}$ esetén az egységnégyzetre vonatkozó komplementer lesz $2(1 - d)$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög (lásd az ábrát). Ebből az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény is gyorsan adódik.



$$F_b(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0 \\ 2x^2, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2(1-x)^2, & \text{ha} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja:

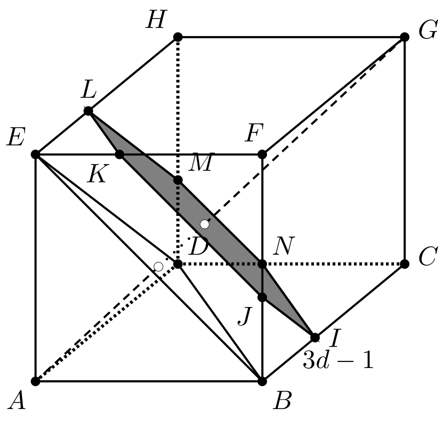
$$\rho_b(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0 \\ 4x, & \text{ha} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 4(1-x), & \text{ha} \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$$



c) Az $(x; y; z)$ véletlen számhármasnak most a térbeli Descartes koordinátarendszer pozitív térnyolcadában elhelyezkedő $[0;1] \times [0;1] \times [0;1]$ egységkocka egy véletlen $P(x; y; z)$ pontját feleltethetjük meg. A $\frac{x+y+z}{3} \le d$ feltételnek megfelelő pontok az $x+y+z = 3d$ sík által határolt, az origót is tartalmazó féltérnek a kocka felületére és belsejébe eső pontjai felelnek meg.

$d \le \frac{1}{3}$ esetén ez a térrész egy olyan tetraéder, amelynek egyik csúcsa az origó és az itt összefutó három él egymásra páronként merőleges és mindegyik épp $3d$ hosszú. E tetraéder térfogata az egységkocka térfogatának $\frac{(3d)^3}{6}$-szerese.

Hasonlóan egyszerű a $\frac{2}{3} \le d$ eset, ugyanis ekkor a vizsgált térrész egységkockabeli komplementere olyan tetraéder, amelynek egymásra páronként merőleges, az $(1;1;1)$ csúcsban összefutó élei mind $3(1-d)$ hosszúságúak, így a vizsgált térrész az egységkocka térfogatának $\left(1 - \frac{(3-3d)^3}{6}\right)$-szerese.



Áttérünk az előbbieknél nehezebb $\frac{1}{3} \leq d \leq \frac{2}{3}$ esetre. Ekkor az $x+y+z=3d$ egyenletű Σ sík az egységkocka hat élét is metszi. Ha a kocka csúcsai

$$A(0;0;0),\quad B(1;0;0),\quad C(1;1;0),\quad D(0;1;0),$$

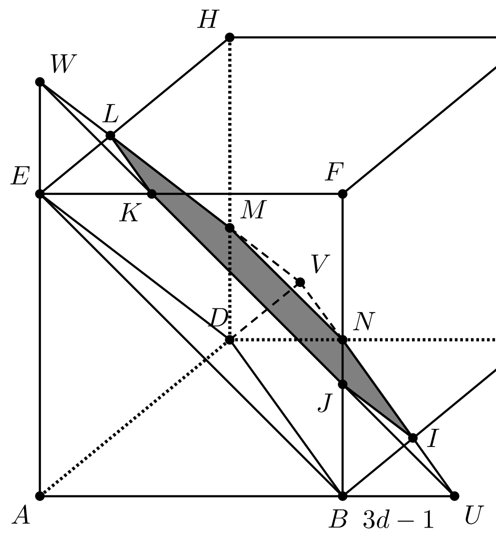
$$E(0;0;1),\quad F(1;0;1),\quad G(1;1;1),\quad H(0;1;1),$$

akkor az AG átlóra merőleges Σ és a

$$BC,\quad BF,\quad EF,\quad EH,\quad HD,\quad DC$$

élek metszéspontjait jelölje rendre

$$I,\quad J,\quad K,\quad L,\quad M,\quad N.$$



A Σ sík a pozitív síknegyedből az $UVWA$ tetraédert metszi ki, melynek A-ben összefutó élei egymásra páronként merőlegesek és $3d$ hosszúságúak. Ennek a tetraédernek az egységkockán kívül eső része három egybevágó és az előzőhöz hasonló tetraéderből áll. Ezek az

$$IJBU,\qquad LKEW,\qquad MNDV$$

tetraéderek melyeknek az U, W, V csúcsban összefutó egymásra páronként merőleges éleinek hossza $(3d-1)$. Így a vizsgált térrész térfogata

$$\frac{(3d)^3-3(3d-1)^3}{6}.$$

$$F_c(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<0 \\ \frac{(3x)^3}{6}, & \text{ha} \quad 0\leq x\leq \frac{1}{3} \\ \frac{(3x)^3-3(3x-1)^3}{6}, & \text{ha} \quad \frac{1}{3}\leq x\leq \frac{2}{3} \\ 1-\frac{(3-3x)^3}{6}, & \text{ha} \quad \frac{2}{3}\leq x\leq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1<x \end{cases}$$

$$\rho_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0 \\ \frac{3(3x)^2}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3(3x)^2 - 9(3x-1)^2}{2}, & \text{ha} \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{3(3-3x)^2}{2}, & \text{ha} \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$$

egyelosszelvarh Határozzuk meg az egyelosszel feladatban látott eloszlások várható értékét!

soltivalfolyt20felt
Egy pálcát véletlenszerűen eltörünk, rajta a töréspontot egyenleets eloszlással választjuk ki. Ezután a nagyobb darabon megint véletlenszerűűen, egyenletes eloszlással választunk egy pontot, amelynél eltörjük a pálcát. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a törésekkel kapott három szakaszból háromszög szerkeszthető?

Megoldás
Azonosítsuk a pálcát a $[0;1]$ intervallummal, az első töréspontot az x, a második töréspontot az y számmal. Míg x a $[0;1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, addig $\frac{1}{2} < x$ esetén y a $[0;x]$ intervallumon, míg $x < \frac{1}{2}$ esetén az $[x;1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A két eset szimmetrikus, alább az $\frac{1}{2} < x$ esetet elemezzük.

Legyen ekkor $y = tx$, ahol tehát t a $[0;1]$ intervallumon egyenletes valószínűségi változó. A $P(x;t)$ pont most a $[\frac{1}{2};1] \times [0;1]$ téglalapban egyenletes eloszlással választott pont.

A három létrejött darab hossza:

$$y = tx, \qquad (x-y) = x(1-t), \qquad (1-x).$$

A háromszög szerkeszthetőségének feltételei:

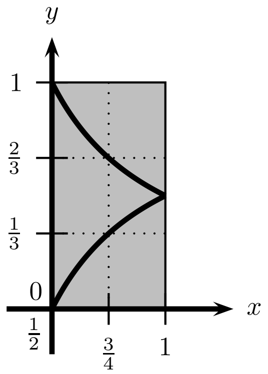
$$(i) \quad tx + x(1-t) > 1 - x,$$

$$(ii) \quad x(1-t) + (1-x) > tx, (iii) \quad (1-x) + tx > x(1-t).$$

Az (i) feltétel az $\frac{1}{2} < x$ esetben automatikusan teljesül. A $(ii) - (iii)$ feltételek a

$$1 - \frac{1}{2x} < t < \frac{1}{2x}$$

relációban foglalhatók össze. Ez azt jelenti, hogy akkor szerkeszthető háromszög, ha a P pont az ábrán látható hiperbolaívek közé esik.



Az alsó hiperbolaív alatti (rossz) terület:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1-\frac{1}{2x}dx = \left[x-\frac{\ln(2x)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

Az ábra szimmetriáját, továbbá az $x<\frac{1}{2}$ esetet is figyelembe véve a keresett valószínűség

$$1-4\frac{1-\ln 2}{2} = 2\ln 2 - 1$$

-nek adódik.

OKTV1996ford2katSPfel3

Három hajótörött mindegyike egy-egy órát tölt (egyhuzamban) egy szigeten ma délután valamikor 5 ĂŠs 9 óra között (véletlenszerűen). Ha hármuk közüpontosan kettő fél óránál hosszabb ideig egyszerre tartóott, akkor viszály tör ki. Mekkora a valószínűsége annak, hogy békében telik el a mai nap?

Eredmény: $\frac{47}{108}$

egyelosszeloszn01

χ_1, χ_2, χ_3, ... a $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ egyenletes, egymástól független valószínűségi változók. Legyen $\Sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\chi_k$. Határozzuk meg Σ_n

a) eloszlását, **b)** sűrűségfüggvényét,

c) várható értékét **d)** és szórását!

Megoldás

a) Jelölje Σ_n eloszlásfüggvényét F_n, sűrűségfüggvényét ρ_n. Tudjuk, hogy

$$F_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<-\frac{1}{2} \\ x+\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}<x \end{cases}$$

$$\rho_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<-\frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha} \quad -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}<x \end{cases}.$$

Alább rekurziót állítunk fel az F_n függvénysorozatra. Az $F_{n+1}(y) = p(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} \leq x)$ valószínűséget az $x_{n+1} \in [0;1]$ változó értékei szerint a teljes valószínűség elve segítségével becsüljük. Ha az x_{n+1} változó csak a diszkrét a_0, a_1, …, a_{N-1}, a_N értékeket vehetné fel, akkor az

$$x_{n+1} = a_0, \quad x_{n+1} = a_1, \quad , \ldots \quad x_{n+1} = a_{N-1}, \quad x_{n+1} = a_N$$

események teljes eseményrendszert alkotnának és így teljesülne az

$$p(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \leq y) = \sum_{m=0}^{N} p(x_{n+1} = a_m) p(\sum_{k=1}^{n} x_k \leq y - a_m)$$

összefüggés.

A folytonos esetben a $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ intervallum egy tetszőleges

$$-\frac{1}{2} = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{N-1} < a_N = \frac{1}{2}$$

felosztására

$$a_0 \leq x_{n+1} < a_1, \quad a_1 \leq x_{n+1} < a_2, \quad , \ldots$$
$$\ldots \quad a_{N-2} \leq x_{n+1} < a_{N-1}, \quad a_{N-1} \leq x_{n+1} < a_N$$

a teljes eseményrendszer. Ezen események valószínűsége rendre

$$(a_1 - a_0), \qquad (a_2 - a_1), \qquad \ldots$$
$$\ldots \qquad (a_{N-1} - a_{N-2}), \qquad (a_N - a_{N-1}).$$

A teljes valószínűség tételét most csak alsó és felső közelítés formájában írjuk fel:

$$\sum_{m=0}^{N-1} p(a_m \leq x_{n+1} < a_{m+1}) p(\sum_{k=1}^{N} x_k \leq y - a_{m+1}) \leq$$
$$\leq p(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \leq y) \leq \sum_{m=0}^{N-1} p(a_m \leq x_{n+1} < a_{m+1}) p(\sum_{k=1}^{N} x_k \leq y - a_m).$$

Ugyanez másképp:

$$\sum_{m=0}^{N-1} F_n(y - a_{m+1})(a_{m+1} - a_m) \leq F_{n+1}(y) \leq \sum_{m=0}^{N-1} F_n(y - a_m)(a_{m+1} - a_m).$$

A fenti reláció bal és jobb oldalán található kifejezés az

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_n(y - x) dx$$

integrál egy-egy közelítő összege. Könnyen igazolható rekurzívan, hogy F_n folytonos, így integrálható, tehát $F_n(y-x)$ is integrálható bármely rögzített y-ra. Ebből tehát

$$F_{n+1}(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_n(y-x)dx,$$

azaz

$$F_{n+1}(y) = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} F_n(x)dx. \tag{1}$$

Például

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y < -1 \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2}dx, & \text{ha} \quad -1 \le y \le 0 \\ \int_{y-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} 1dx, & \text{ha} \quad 0 \le y \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < y \end{cases}$$

azaz

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y < -1 \\ \frac{(y+1)^2}{2}, & \text{ha} \quad -1 \le y \le 0 \\ 1 - \frac{(y-1)^2}{2}, & \text{ha} \quad 0 \le y \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < y \end{cases}$$

A (1) összefüggés deriváltjaként adódik a sűrűségfüggvények rekurziója:

$$\rho_{n+1}(y) = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \rho_n(x)dx. \tag{2}$$

A ρ_n sűrűségfüggvény az

$$I_n = \left[-\frac{n}{2}; \frac{n}{2}\right]$$

intervallumon kívül zérus, azon belül viszont szakaszonként – egy egységnyi hosszúságú intervallumonként – egy-egy (összesen n) egyszerű képlet, nevezetesen épp $(n-1)$-edfokú polinom írja le.

A 2 képletből számolással határoztuk meg az első néhány ρ_n függvényt. Az alább látható „Egyenletes Pascal-háromszög" alsó sorának számolásához egyéb ötletet is bevetettünk.

-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
				1				
			$\frac{1+x}{1}$		$\frac{1-x}{1}$			
		$\frac{\left(\frac{3}{2}+x\right)^2}{2}$		$\frac{3}{4}-x^2$		$\frac{\left(\frac{3}{2}-x\right)^2}{2}$		
	$\frac{(2+x)^3}{6}$		$\frac{(2+x)^3-4(1+x)^3}{6}$		$\frac{(2-x)^3-4(1-x)^3}{6}$		$\frac{(2-x)^3}{6}$	
$\frac{\left(\frac{5}{2}+x\right)^4}{24}$		$\frac{\left(\frac{5}{2}+x\right)^4-5\left(\frac{3}{2}+x\right)^4}{24}$		$\frac{115}{192}-\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{4}x^4$		$\frac{\left(\frac{5}{2}-x\right)^4-5\left(\frac{3}{2}-x\right)^4}{24}$		$\frac{\left(\frac{5}{2}-x\right)^4}{24}$

Mintha az n-edik sorban álló függvények összege az azonosan n függvény lenne. Miért van ez így?

Az explicit képlet is megsejthető: az n-edik sorban az

$$I_{n,k}=\left[-\frac{n}{2}+k;-\frac{n}{2}+k+1\right],\qquad k\in 0,1,\ldots,(n-1)$$

intervallumban a ρ_n sűrűségfüggvény képlete

$$\rho_{n,k}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}\left(x+\frac{n}{2}-j\right)^{n-1}.$$

Sőt $k=n$-re

$$\rho_{n,n}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\left(x+\frac{n}{2}-j\right)^{n-1}=0.$$

Egyúttal

$$\rho_{n,k}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\binom{n}{j}\left(x-\frac{n}{2}+j\right)^{n-1}.$$

Pl a középső tagok:

$$\frac{3}{4}-x^2=\frac{\left(\frac{3}{2}+x\right)^2}{2}-3\frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}{2}=\frac{\left(\frac{3}{2}-x\right)^2}{2}-3\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}{2}.$$

$$\frac{115}{192}-\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{4}x^4=$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2}+x\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2}+x\right)^4 + 10\left(\frac{1}{2}+x\right)^4}{24} = \frac{\left(\frac{5}{2}-x\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2}-x\right)^4 + 10\left(\frac{1}{2}-x\right)^4}{24}$$

A hatodik sor tagjai:

$$\frac{(3+x)^5}{120}, \qquad \frac{(3+x)^5-6(2+x)^5}{120}, \qquad \frac{(3+x)^5-6(2+x)^5+15(1+x)^5}{120},$$

$$\frac{(3-x)^5-6(2-x)^5+15(1-x)^5}{120} = \frac{(3+x)^5-6(2+x)^5+15(1+x)^5-20x^5}{120},$$

$$\frac{(3-x)^5-6(2-x)^5}{120} = \frac{(3+x)^5-6(2+x)^5+15(1+x)^5-20x^5+15(-1+x)^5}{120},$$

$$\frac{(3-x)^5}{120} = \frac{(3+x)^5-6(2+x)^5+15(1+x)^5-20x^5+15(-1+x)^5-6(-2+x)^5}{120},$$

és

$$0 = \frac{(3+x)^5-6(2+x)^5+15(1+x)^5-20x^5+15(-1+x)^5-6(-2+x)^5+(-3+x)^5}{120}.$$

Emellett sejtésünk szerint még az is igaz, hogy a fenti hat polinom összege a 6 szám, azaz

$$6 = \frac{6(3+x)^5-5\cdot 6(2+x)^5+4\cdot 15(1+x)^5-3\cdot 20x^5+2\cdot 15(-1+x)^5-1\cdot 6(-2+x)^5}{120}.$$

2. Valószínűségszámítás a geometriában

1. Feladat (Buffon-féle tűprobléma) Egy padlón a parketta vonalai párhuzamosak és egymástól d távolságra vannak. Véletlenszerűen leejtünk egy t hosszú tűt ($t < d$). Mennyi a valószínűsége, hogy metsz egy vonalat?

Megoldás A tű iránya véletlenszerű, az iránya 0 és π között egyenletes eloszlású, ezért egy, a parketta vonalaira merőleges egyenesre vett vetületének várható értéke

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi sin(x)t\ dx = \frac{2t}{\pi}$$

Annak a valószínűsége, hogy ez a vetület (és így a tű maga) metsz egy vonalat $p = \frac{2}{\pi}\frac{t}{d}$

Megjegyzés A megoldás ismeretében lehetőségünk van rá, hogy kísérletileg megmérjük a π értékét! Ha ugyanis sok kisérlet alapján a metszés valószínűsége $p_{\text{mért}}$, akkor

$$\pi \approx \frac{2}{p_{\text{mért}}}\frac{t}{d}$$

2. Feladat Legyen S konvex sokszög a síkban. Jelölje $pr(\varphi)$ S vetületének hosszát egy φ irányú egyenesere. Határozzuk meg a $pr(\varphi)$, $(0 \le \varphi < \pi)$ függvény ismeretében S kerületét.

Megoldás A vetület pontjaiba S-nek pontosan két határpontja képződik. (Véges sok pontot kivéve.) Láttuk, hogy egy t hosszú szakaszt minden irányba vetítve a vetület várható hossza $\frac{2}{\pi}t$. Ezért

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi pr(\varphi)d\varphi = E(\text{vetület}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}K(S) = \frac{K(S)}{\pi}$$

$$\int_0^\pi pr(\varphi)d\varphi = K(S)$$

3. Feladat Legyen AB egy 1 hosszúságú szakasz. Vetítsük egy véletlenszerű irányú térbeli egyenesre. Határozzuk meg a vetület hosszának várható értékét.

Megoldás Az egyenes forgatása és AB rögzítése helyett rögzítsük az x tengelyt és forgassuk a szakaszt. Feltehető, hogy egyik végpontja az origó. Ismert, hogy az egységgömböt az x tengelyre merőleges, egymástól egyenlő távolságra lévő síkokkal felszeletelve a szeletekbe ugyanannyi jut az egységgömb felszínéből. Így a gömbfelszín pontjainak első koordinátája egyenletes eloszlású $[-1, 1]$-en. Tehát $E(\text{vetület}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\ dx = \frac{1}{2}$

4. Feladat Felveszünk két pontot az egység**kör** belsejében egyenletes valószínűségeloszlás szerint. Határozzuk meg a távolságuk E várható értékét.

Megoldás Először meghatározzuk az egységkörön egy kerületi pont és egy véletlen belső pont távolságának E' várható értékét. Legyen a kerületi pont $(1, 0)$, szeleteljük fel a körlapot innen induló félegyenesekkel. α irányú félegyenesnek nevezzük azt, aminél a "felső" ív hossza α. $(0 < \alpha < 2\pi)$ A félegyenesek keskeny háromszögekre bontják a körlapot. E' kiszámításához megnézzük, hogy az egyes háromszögeken mekkora a távolság várható értéke, majd ezt átlagoljuk figyelembe véve, hogy különböző α-ákra mekkora az α és $\alpha+\delta$ irányú egyenesek közti háromszög területe.

Egy kis háromszög egyenletesen vastagodik az $(0,1)$ ponttól a körlap és a félegyenes d távolságra lévő végpontjáig. Így a távolság várható értéke $\frac{2}{3}d$. Ha az egyenes iránya α, akkor $d = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.

Az α irányú félegyenes feletti körszelet területe $T(\alpha) = \frac{\alpha - \sin\alpha}{2}$. Deriváljuk ezt, Így kapjuk az f sűrűségfüggvényt. $f(x) = \frac{1-\cos x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$ $(0 \le x \le 2\pi)$ Erre igaz, hogy $\int_\alpha^\beta f(x) = T(\beta) - T(\alpha)$. Ezek alapján E' így számítható:

$$E' = \frac{1}{T_{\text{kör}}}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot f(x)\, dx = \frac{4}{3\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{8}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin^3 x\, dx = \frac{8}{3\pi}\left[\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{8}{3\pi}\frac{4}{3} = \frac{32}{9\pi}$$

Most rátérünk E meghatározására. Legyen χ az valószínűségi változó, amely egyenlő a két pont origótól mért távolsága közül a nagyobbikkal. $P(\chi \le r) = (r^2)^2 = r^4$. Ennek deriválásával kapható a sűrűségfüggvény:

$$f_\chi(r) = 4r^3\ (0 \le r \le 1)$$

Ha tudjuk, hogy a távolabbi pont az origótól r távolságra van, akkor a két pont egy r sugarú körlap határán, illetve a belsejében van. Távolságuk várható értéke így rE'. Most már kiszámíthatjuk E-t:

$$E = \int_0^1 rE' f_\chi(r)\, dr = \frac{32}{9\pi}\int_0^1 4r^4\, dr = \frac{32}{9\pi}\cdot\frac{4}{5} = \frac{128}{45\pi} \approx 0.905$$

5. Feladat Felveszünk két pontot az egység**gömb** belsejében egyenletes valószínűségeloszlás szerint. Határozzuk meg a távolságuk E várható értékét.

1. Megoldás Ismét E' meghatározásával kezdjük, ez az egységgömb egy véletlen belső pontjának és egy rögzített határpontnak a távolsága. Legyen a határpont $(1,0,0)$. E' kiszámításához szeleteljük fel a gömböt az x tengelyre merőleges síkokkal, majd a szeleteket bontsuk koncentrikus körökre.

$$E' = \frac{1}{T_{\text{gömb}}}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2h\pi\cdot\sqrt{(1-x)^2+h^2}\, dh\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} h\cdot\sqrt{(1-x)^2+h^2}\, dh\right)dx =$$

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}((1-x)^2+h^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}((1-x)^2+1-x^2)^{\frac{3}{2}} - ((1-x)^2)^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2-2x)^{\frac{3}{2}}-(1-x)^3dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(2t)^{\frac{3}{2}}-t^3dt=\frac{6}{5}$$

Most rátérünk E meghatározására. Legyen χ az valószínűségi változó, amely egyenlő a két pont origótól mért távolsága közül a nagyobbikkal. $P(\chi \leq r) = (r^3)^2 = r^6$. Ennek deriválásával kapható a sűrűségfüggvény:

$$f_\chi(r) = 6r^5 \ (0 \leq r \leq 1)$$

Ha tudjuk, hogy a távolabbi pont az origótól r távolságra van, akkor a két pont egy r sugarú gömb határán, illetve a belsejében van. Távolságuk várható értéke így rE'. Most már kiszámíthatjuk E-t:

$$E=\int_{0}^{1} rE'f_\chi(r)\ dr=\frac{6}{5}\int_{0}^{1}6r^6\ dr=\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}=\frac{36}{35}\approx 1.028$$

2. Megoldás A 3. Feladat alapján elég lenne a két pont első koordinátában vett eltérésének várható értékét meghatározni, E ennek a kétszerese. Az egységgömb azon részeinek területe, ahol az első koordináta v és $v+\delta$ illetve u és $u+\delta$ közé esik, úgy aránylik egymáshoz, mint $1-v^2$ és $1-u^2$, ha $\delta \to 0$. Ezért az első koordinátát megadó valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(t)=\frac{3}{4}(1-t^2)$, $(-1 \leq t \leq 1)$. (A konstans szorzó $\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = 1$ miatt kell.)

Annak a valószínűségi változónak, ami a két első koordináta eltérését írja le, ez lesz a sűrűségfüggvénye:

$$g(d)=2\cdot\int_{d-1}^{1}f(t)f(t-d)\ dt=\frac{9}{8}\int_{d-1}^{1}(1-t^2)(1-(t-d)^2)\ dt=$$

$$=-\frac{3}{80}d^5+\frac{3}{4}d^3-\frac{3}{2}d^2+\frac{6}{5}$$

Itt azért szoroztunk 2-vel, mert a két pont felcserélhető. Az első koordináták eltérésének várható értéke:

$$\int_{0}^{2} g(d)\cdot d\ dd=\frac{18}{35}$$

E ennek a kétszerese, azaz $\frac{36}{35}$.

Megjegyzés A fenti két megoldási módszer elméletben használható a síkbeli esetben is, azonban a számolás során komoly technikai nehézségekkel szembesülünk.

Feladat (Kürschák verseny, 2011/3.) Adott a síkon $2n$ pont és $3n$ egyenes. Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan P pont, hogy P-nek a $3n$ egyenestől való távolságainak összege kisebb, mint P-nek a $2n$ ponttól való távolságainak összege.

Megoldás Legyen O egy pont a síkon. Legyen r az O távolságának maximuma az $5n$ adott objektumtól. Vegyünk egy O középpontú R sugarú kört. Ha R elég nagy, akkor belátjuk, hogy lesz rajta megfelelő P pont. A körvonal egy pontjának távolsága egy adott ponttól legalább $R-r$, ezen távolságok összege így legalább $2nR-2nr$. Ha e egy adott egyenes, legyen e' a vele párhuzamos O-n átmenő egyenes. Ha p a körvonal egy pontja, akkor p és e távolsága legfeljebb annyi, mint p és e' távolsága plusz r. p és e' távolságának átlaga, miközben p fut a körön

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R|\sin(x)| = \frac{2R}{\pi}$$

így összegezve a $3n$ egyenesre legfeljebb $\frac{2}{\pi}3nR+3nr$ lesz az átlagos távolságösszeg. Ha R elég nagy, akkor

$$\frac{2}{\pi}3nR+3nr < 2nR-2nr$$

$$\frac{5}{2\left(1-\frac{3}{\pi}\right)}r < R$$

Tehát valamely P pont jó lesz a körvonalon (például az, aminek minimális a távolságösszege az egyenesektől).

3. Megismerés Bayes módján

HRPVA10 Milyen kvarkok? – fiktív elmélet Bayesiánus vizsgálata)[HRPVA]

Egy elméleti fizikus arra a következtetésre jut, hogy a neutron tartalmaz még három eleddig ismeretlen típusú kvarkot, amelynek két lehetséges változata van. A két változatot fizikusunk „fehér” és „fekete” kvarknak nevezte el, de nem tudta megmondani, hogy a három újfajta kvark között hány fehér és hány fekete van: az elmélet mind a négy lehetőséget (0, 1, 2 vagy 3 fehér kvark) egyformán megengedte.

Sikerült azonban megmutatnia, hogy a fehér-fekete színmegoszlás kísérletileg vizsgálható. Amikor ugyanis elektronokkal bombázzuk a neutronokat, az új kvarkok egyike nagyon ritkán, véletlenszerűen, virtuális részecske formájában rövid időre kilép a neutronból, és az elektron szóródni tud rajta. Az „elmélet” szerint a fehér és a fekete kvark különböző módon szórja az elektronokat (az egyik mondjuk „jobbra”, a másik „balra”), ezért ebből a kísérletből meg lehet tudni, hány fehér és hány fekete kvark van a neutronokban.

Ez a kísérlet azonban nagyon költséges. A költségvetést úgy állapították meg, hogy a kísérletet addig folytathatjuk, ameddig — mondjuk — 5 bennünket érdeklő folyamatot nem találunk, tehát 5 szóródást figyelhetünk meg.

Tegyük fel, hogy a kísérlet megtörtént és az 5 folyamatból 2 tartozott fehér, 3 pedig fekete kvarkhoz. Milyen a 3 kvark színmegoszlása?

Megoldás

Ahhoz, hogy el tudjunk indulni a feladat megoldásában meg kell állapodni egy prior (előzetes) valószínűségeloszlásban. Erről nem a matematika dönt, sokkal inkább a már megismert fizikai körülmények és ismeretek. Mi lesz a prior? Az adott esetben a kísérlet előtt fogalmunk sincs róla, milyen a színeloszlás. Ezt a teljes tudatlanságot valószínűleg akkor fejezzük ki megfelelő módon, ha kezdetben a fehér kvarkok M számának mind a négy lehetséges értékét egyenlően valószínűnek tekintjük[1]:

$$P_E(M) = \frac{1}{4}$$

(E itt az „előzetes" szóra utal, ez a valószínűség semmiképpen sem függhet attól, hogy mi a később elvégzendő kísérlet eredménye).

Most már alkalmazhatjuk a Bayes-tételt. Annak valószínűsége, hogy a fehér golyók száma M a kísérlet elvégzése után:

$$P_U(M) = \frac{1}{12}M^2(3-M)^3.$$

milyenermebayesHRP(Milyen érme? – Bayesiánus vizsgálat)

Egy pénzérméről szeretnénk eldönteni, hogy milyen, feldobás esetén milyen eséllyel lesz fej illetve írás. Jelöljük p-vel annak az esélyét, hogy fej lesz – és így $(1-p)$ eséllyel írás – de ne döntsük el előre p értékét csak annyit tegyünk fel (prior valószínűség), hogy p értéke valamely H_0 valószínűségi változó szerint oszlik el a $[0;1]$ intervallumban. Legyen most a H_0 eloszlás az egyenletes eloszlás.

a) Mennyi az esélye a H_0 eloszlásnál, hogy ha feldobunk egy pénzérmét, az fej lesz?

b) Földobtuk, fej lett. Az eredmény alapján a Bayes-tétel milyen H_1 valószínűségeloszlást ad p értékére (posterior valószínűség)?

c) Legyen most H_1 a prior valószínűség(eloszlás). Mennyi az írás dobás esélye?

d) Feldobtuk, írás lett. Mindezek alapján a Bayes-tétel milyen H_2 valószínűségeloszlást ad p értékére (posterior valószínűség)?

e) A H_2 eloszlás esetén mennyi a valószínűsége, hogy ha feldobjuk az érmét, fej lesz?

f) A H_0 prior valószínűségeloszlást feltételezve (egyenletes eloszlás), mennyi az esélye annak, hogy m kísérletből r-szer lesz fej? Ha m elvégzett kísérletből tényleg r-szer lett fej, akkor milyen H_m^r posterior valószínűségeloszlást ad a Bayes tétel? Ennél az eloszlásnál mennyi a fej dobásának esélye?

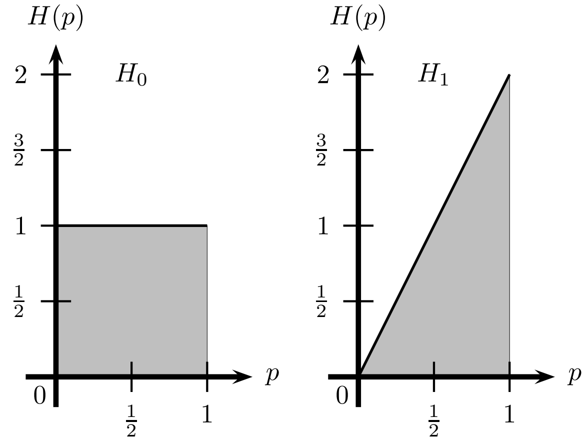
Megoldás

[1] Ez Laplace vitatható megközelítése. „Ez a tudatlanság egyenletes eloszlású" – gúnyolják ellenfelei. Lásd [POLYPL][144-145. o.]

a) A fej dobás valószínűsége a H_0 prior valószínűségeloszlás esetén

$$P(F) = \int_0^1 p \cdot H_0(p)\,dp = \int_0^1 p\,dp = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

b) A Bayes-tétel szerint (lásd az alábbi ábrát):



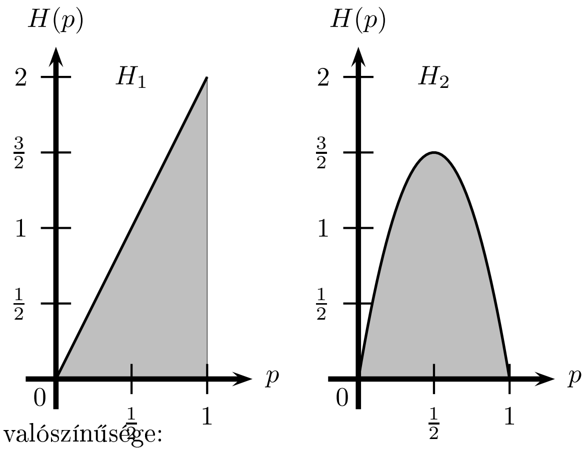
$$H_1(p) = \frac{pH_0(p)}{\int_0^1 p \cdot H_0(p)\,dp} = 2p. \tag{4}$$

c) Az írás valószínűsége a H_1 prior valószínűségeloszlás esetén

$$P(I) = \int_0^1 (1-p) \cdot H_1(p)\,dp = \int_0^1 (1-p) \cdot 2p\,dp = \frac{1}{3}. \tag{5}$$

d) A Bayes-tétel szerint most (lásd az alábbi ábrát):

$$H_2(p) = \frac{(1-p)H_1(p)}{\int_0^1 (1-p) \cdot H_1(p)\,dp} = 6p(1-p). \tag{6}$$



e) A fej valószínűsége:

$$P(F) = \int_0^1 p \cdot H_2(p)\, dp = \int_0^1 6p^2(1-p)\, dp = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

f) $H_m^r(p) = \frac{(m+1)!}{r!(m-r)!}p^r(1-p)^{m-r}$, a következő próbálkozásra a fej esélye

$$\int_0^1 p \cdot H_m^r(p)\, dp = \frac{r+1}{m+2}.$$

Hivatkozások

[HRPVA] Hraskó Péter, *Valószínűség*, Fizikai Szemle 2008/7-8, ill. a „Biztos, hogy az energia megmarad? – és más esszék a fizikáról" kötetben, Typotex 2012

[POLYPL] Pólya György, *A plauzibilis következtetés* (A matematikai gondolkodás mĂťvészete II.), Gondolat Kiadó, 1989.

[SOLTVA] Solt György *Valószínűségszámítás* , Bólyai sorozat, Műszaki Könyvkiadó, 1973.