1. Fehér twix

Bukva Balázs Imolay András,
Molnár-Sáska Zoltán, Németh Balázs

1.1. Bukva Balázs

BB/1. Keressük meg a 81 legkisebb többszörösét, amely csak az 1-es számjegyet tartalmazza.

BB/2. Legyen ABC nem tompaszögű háromszög, és D a BC szakasz egy pontja. Legyen k_1, k_2 az ADB és ADC körülírt körei rendre. Az ADB szög belső szögfelezője messe a k_1 kört másodszor az E pontban és az ADC belső szögfelezője a k_2 kört másodszor az F pontban. Mi kell, hogy teljesüljön az ABC háromszögre, hogy az E, A, F pontok egy egyenesre essenek.

BB/3. Legyen n pozitív egész. Igazoljuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i^2+i)^{3/4}} > 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

BB/4. Legyen S pozitív egészek egy halmaza és minden $n \geq 1$-re legyen

$$S_n = \{i \mid i \leq n,\ i \in S\}.$$

Igazoljuk, hogy $\sum_{s \in S} \frac{1}{s}$ konvergens, ha minden n-re $|S_n| \leq \sqrt{n}$.

BB/5. Legyen p páratlan prím, és $a_1, a_2, \ldots, a_p$ különböző számok. Továbbá tegyük fel, hogy létezik egy $P(x)$ polinom amelynek a foka nem nagyobb mint $\frac{p-1}{2}$ és $P(i) \equiv a_i$ (mod p). Igazoljuk, hogy adott d számra

$$\sum_{i=1}^{p} (a_{i+d} - a_i)^2 \equiv 0 \text{ (mod p)}$$

fennáll.

BB/6. Legyen S ponthalmaz olyan, hogy bármely két pont távolsága egész szám és van három nem kollineáris pont. Igazoljuk, hogy $|S|$ véges.

BB/7. Legyen $n \geq 2$ és legyen k azon prímek száma amik nem nagyobbak mint n. Tegyük fel, hogy $A \subseteq S = \{2, \ldots, n\}$, $|A| \leq k$ és A semelyik két eleme nem osztja egymás. Bizonyítsuk be, hogy létezik $A \subseteq B \subseteq S$, hogy B semelyik két eleme sem osztja egymást és $|B| = k$.

1.2. Imolay András

IA/1. Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

IA/2. Hívjunk egy A egészekből álló halmazt *elfogadó*nak, ha teljesül rá, hogy:
Ha $a, b \in A$ (lehet $a = b$) akkor $a^2 + kab + b^2 \in A$ minden egész k-ra.
Határozzuk meg az összes egészekből álló nemnulla m, n párt, melyekre teljesül, hogy az egyetlen elfogadó halmaz mely tartalmazza m-t és n-t is az egész számok halmaza.

IA/3. Bármely $n \geq 2$ egészre legyen $N(n)$ az a legnagyobb szám, melyre léteznek olyan (a_i, b_i, c_i) $(i = 1, 2, ..., N(n))$ nemnegatív egészekből álló számhármasok, melyekre teljesül a következő 2 állítás:

(1) $a_i + b_i + c_i = n$ minden $i = 1, 2, ..., N(n)$-re;

(2) Ha $i \neq j$ akkor $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$, $c_i \neq c_j$.

Határozzuk meg $N(n)$-t.

IA/4. Legyen ABC háromszögben $AB > AC$. Legyen D, E rendre a B és C-hez tartozó magasságok talppontjai. Legyen F a BC oldal felezőpontja, legyen e A-n áthaladó AF-re merőleges egyenes. e és DE egyenesek metszéspontja legyen G. Bizonyítsuk be, hogy a GFC szöget felezi AF.

IA/5. Legyen g nemnegatív egészekből nemnegatíg egészekbe képző függvény melyre minden $n \geq 0$ teljesül, hogy:

$$g(4n) = g(2n) + g(n) \tag{1}$$
$$g(4n+2) = g(4n) + 1 \tag{2}$$
$$g(2n+1) = g(2n) + 1 \tag{3}$$

Bizonyítsuk be, hogy minden m pozitív egészre pontosan $g(2^{m+1})$ olyan n van melyre $0 \leq n < 2^m$ és $g(4n) = g(3n)$.

IA/6. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja legyen O. Legyen M a BC felezőpontja és legyen H az A-ból induló magasság talppontja. Legyen K H tükörképe M-re. Legyen D,E rendre B és C vetülete az AM egyenesen. Legyen Q a KDE körülírt körének a középpontja. Bizonyítsuk be, hogy OQ párhuzamos AM-mel.

IA/7. Vegyünk egy poliédert aminek legalább 5 lapja van és minden csúcsából pontosan 3 él indul. 2 játékos a következőt játssza: A játékosok felváltva lépnek és a saját körében minden játékos ráírhatja a nevét a poliéder egy lapjára, amelyre még egyikük sem írta korábban. Az a játékos nyer aki először ráírja 3 lapra a nevét melyek egy csúcsban találkoznak, ha ez egyiküknek sem sikerül akkor döntetlen. Igaz-e hogy a kezdő játékos mindig nyer ha a lehető legjobban játszik.

1.3. Molnár-Sáska Zoltán

MSZ/1. Jordan és 12 barátja egy pakli franciakártyával játszanak. Kiosztják a lapokat, mindenki kap 4-et. Lehetséges-e mindig, hogy mindenki kiválaszt egy lapot a kezéből és összesen az így kiválasztott 13 lap között pontosan egy 2-es, egy 3-as, . . . , egy ász szerepel?

MSZ/2. Philippe és Roberto a következő játékot játszák. Adott egy n természetes szám. Egy táblára kezdetben fel vannak írva az 1, 2, 3, ..., 2^{2n+1} számok. Felváltva lépnek, Philippe kezd. Egy lépésben ki kell választani egy p^k számot -ahol p egy 3-tól eltérő prím, k pedig pozitív egész- úgy, hogy a táblán lévő számok közül legalább egy osztható p^k-nal. Ezután az összes számot, ami osztható p^k-nal azt elosztják p^k-nal és a táblára a hányadosokat írják helyettük. Az veszít, aki nem tud lépni. Milyen n-re kinek van nyerő stratégiája?

MSZ/3. Dejan választott három pozitív valós számot: a-t, b-t és c-t olyan módon, hogy a szorzatuk 1. Segíts neki belátni, hogy akármilyen választás esetén:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

MSZ/4. Adott a síkon n különböző pont, semely 3 nem esik egy egyenesre. Daniel rajzolt a füzetébe egy n csúcsú fagráfot, a csúcsait 1-től n-ig számozta. Bizonyítsuk be, hogy Adam meg tudja számozni a síkon adott pontokat az 1, 2, . . . , n számokkal úgy, hogy miután behúzza Daniel fagráfjának az éleinek megfelelő szakaszokat (tehát pl. ha a 3-as és az 5-ös csúcs között van él Daniel gráfjában, akkor a síkon behúzza a 3-as és 5-ös pontokat összekötő szakaszt), semely 2 szakasz nem fogja metszeni egymást (a megadott pontokban persze összefuthatnak szakaszok)!

MSZ/5. Georginio megrajzolta az O_k, O_l középpontú k, l köröket. Ezek egyik metszéspontja A. Adott A-n keresztül egy a egyenes, melynek a k, l körökkel vett 2. metszéspontja K és L. Mi $KO_k \cup LO_l$ mértani helye (ha a fut)?

MSZ/6. Mohamed választott három pozitív valós számot, a-t, b-t és c-t. Lássuk be, hogy akármilyen választás esetén teljesül, hogy:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

MSZ/7. Sadio egy kvízjátékkal játszik a számítógépen. A játék 10 kérdésből áll, mindegyiknél A, B, C, D válaszlehetőségek vannak, melyekből pontosan az egyik a helyes. A kérdések és a válaszlehetőségek minden játéknál ugyanazok, ugyanabban a sorrendben. Sadio egy játék közben nem tudja, hogy az aktuális kérdésre helyesen válaszolt-e, viszont a gép a végén kiírja a pontszámát (minden jól megválaszolt kérdésért 1 pont jár, egyébként 0, így maximum 10 pontot lehet szerezni). A kérdések sajnos kódolt nyelven vannak írva, így Sadio egy szót sem ért azokból. Bizonyítsuk be, hogy

a) 8 játékkal még nem tud biztosan 10 pontot elérni valamelyik játékban,

b) 16 játékkal már biztosan el tud érni 10 pontot valamelyik játékban!

1.4. Németh Balázs

NB/1. Adott két, pozitív egészekből álló sorozat: $a_1, a_2, ..., a_n$ és $b_1, b_2, ..., b_k$ úgy, hogy i-re $a_i \leq k$ és minden j-re $b_j \leq n$. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $0 \leq i_1 < i_2 \leq n$ és $0 \leq j_1 < j_2 \leq k$ indexek, hogy:

$$a_{i_1+1} + a_{i_1+2} + ... + a_{i_2} = b_{j_1+1} + b_{j_1+2} + ... + b_{j_2}.$$

NB/2. Egyenes tengerparton, a partra merőleges irányban indul el, és állandó v sebességgel halad a csempészek hajója. A parti őrség naszádja kezdetben d távolságra van a csempészektől, és ugyanakkor indul el a parttól, mint azok. Az őrnaszád állandó nagyságú sebességgel mindig a csempészek felé halad, és a parttól éppen d távolságra éri utól a bűnözőket. Hányszor nagyobb a parti őrség naszádjának sebessége, mint a csempészeké?

NB/3. Melyik sorozatok teljesítik a következőket? (1) a_n szigorúan monoton növekvő; (2) $a_2 = 2$; (3) a sorozat minden tagja egész; végül (4) $a_{nm} = a_n a_m$, valahányszor $(n, m) = 1$, vagy szavakkal: a sorozat nm-edik tagja az n-edik és az m-edik tag szorzata, valahányszor n és m relatív prímek.

NB/4. Legyen az M az ABC háromszög AB oldalának valamely belső pontja. Jelölje r_1, r_2 és r rendre az AMC, BMC és ABC háromszögbe írható kör sugarát, továbbá ϱ_1 az AMC háromszög AM oldalához, ϱ_2 a BMC háromszög BM oldalához, végül ϱ az ABC háromszög AB oldalához tartozó hozzáírt kör sugarát.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az $\frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}$ egyenlőség.

NB/5. Legyenek x_1, x_2, ..., x_n olyan pozitív valós számok, melyek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot ... \cdot (1 + x_n) \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$

NB/6. Vannak-e olyan x és y egész számok, melyekre: $y^2 = x^3 + 7$.

NB/7. Két vadász, A és B kacsavadászatra indult. Tegyük fel, hogy mindkét vadász a megcélzott kacsát ugyanolyan gyakran találja el, mint amilyen gyakran elvéti. Az A vadász a vadászat során 50 kacsára adott le lövést, a B 51-re. Mi annak a valószínűsége, hogy a B vadász több kacsát lőtt, mint A?

2. Poszeidón Rozmárjai

Alexy Marcell, Barabás Ábel,
Bursics Balázs, Szakály Marcell

2.1. Alexy Marcell

AM/1. Poszeidón végtelen sok rozmárt sorba állított, és növekvő sorrendben $z_0, z_1, \ldots$ pozitív egész számokat címkézett rájuk. Bizonyítsuk be hogy lesz pontosan egy olyan $n \geq 1$-edik rozmár, akire

$$z_n < \frac{z_0 + t_1 + \ldots + z_n}{n} \leq z_{n+1}.$$

AM/2. A Bölcs Rozsomák új szubatomi részecskét fedezett fel, a *rozmi*-t. A *rozmi*-k párokban összefonódhatnak egymással, egy *rozmi* egyszerre több másik *rozmi*val is összefonódhat. A részecskékkel két fajta műveletet végezhetünk, egyszerre csak egyet:

(1) Ha egy *rozmi* páratlan másik *rozmi*-val van összefonódva, megsemmisítheti.

(2) Megduplázhatja a laborban lévő összes részecskét, minden I részecskéhez egy új I'-t képezve. I és I' össze lesznek fonva, I' és J' pedig pontosan akkor ha I és J is össze voltak. Más változás nem lesz.

Bizonyítsuk be hogy ezen lépések többszöri alkalmazásával a laborban semmivel sem összefonódott *rozmi*-kat állíthat elő.

AM/3. Egy lakatlan szigetre elkezdtek beköltözni a 41-fogú rozmárok. Az első nap egy 41-fogú rozmár jön, a második nap kettő, és így tovább. Poszeidón egy éven keresztül mindennap leírja, hogy hány 41-fogú rozmár van a szigeten. Nagyon örül, ha csak egy féle számjegyet kell használni ehhez. Mely napok csalnak mosolyt Poszeidón arcára?

AM/4. Poszeidón feljelentkezett egy internetes társkereső oldalra. Be is hálózott rögtön nem egy, hanem két lányt is. Szeretne találkozni velük, de sajnos nem tudja, hogy hol laknak. Két rozmár segítségül beáll a szerelmi háromszög magasságpontjába és a körül írt körének a középpontjába. Hol vannak a csajok?

AM/5. Poszeidón rozmárjai szétszóródtak a tengerparton, bizonyos pár rozmárok között kötél húzódhat, egy fráfot alkotva. Bizonyítsuk be, hogy ha a gráf egyszerű, összefüggő, és minden rozmár legalább három másikkal van összekötve, akkor a gráf tartalmaz olyan kört, amelynek éleit elhagyva a gráf összefüggő marad.

AM/6. Poszeidón begyűjtött egy különleges mitózissal szaporodó rozmárt, mely mindennap kettéosztódik. Poszeidón mindennap leírja, hogy hány osztódó rozmára van. Hogy spóroljon a krétával, mindennap csak az első számjegyet írja le. Lesz-e ebben a sorozatban ismétlődés?

AM/7. Poszeidón egy nap arra lett figyelmes, hogy a tenger egy részében a függvényhalak száma egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szerint változik, amelyre igaz, hogy

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra. Az $[x]$ az alsó egészrészét jelöli x-nek. Határozzuk meg az összes ilyen függvényt.

2.2. Barabás Ábel

BÁ/1. Poszeidón sorba állított n rozmárt, és a mindegyikre az $1, 2, 3, ...$ számok közül különböző értéket ragasztott, a k-adik rozmárra a_k-t. Bizonyítsuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

BÁ/2. Poszeidón R sugarú fogadótermében n darab r sugarú rozmár helyezkedik el. Anélkül hogy a rozmárok odébb mennének, más rozmár már sehol sem fér el. Mutassuk meg, hogy $12(Rr - 1) \leq n \leq Rr$.

BÁ/3. A Bölcs Rozsomák a padlásán megtalálta a régi algebra könyvét, és benne az alábbi feladatot: *Legyenek m és n pozitív egészek, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pedig az $A = 1, 2, \ldots, n$ halmaz különböző elemei. Tegyük fel, hogy ha $a_i + a_j \leq n$, akkor létezik olyan k, hogy $a_i + a_j = a_k$ $(1 \leq i \leq j \leq m$ és $1 \leq k \leq m)$. Bizonyítsuk be hogy $\frac{a_1 + ... + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$.*
Segíts neki megoldani.

BÁ/4. Poszeidón talált egy (végtelen hosszú) feljegyzést az összes 15 különböző (pozitív) prímszám által alkotott számtani sorozatból. Van-e olyan amelyben a szomszédos tagok különbsége 30000-nél nem nagyobb?

BÁ/5. Poszeidón szereti a furcsa függvényeket. Tud-e olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt készíteni, melynek racionális helyen irracionális, irracionális helyen racionális az értéke?

BÁ/6. Tekintsünk n rozmárt, és nézzük őket $k < 2^{n-1}$ bináris tulajdonság szerint. Bármely két tulajdonságra van rozmár aki mind a kettőt teljesíti. Bizonyítsuk be, hogy ki tudunk választani pár rozmárt akik nem egyeznek meg egyik tulajdonság szerint kiválasztható rozmárokkal sem, de minden tulajdonságúból tartalmaz legalább egy rozmárt.

BÁ/7. Poszeidónnak boldogságot okoz egy polinom, ha fel tudja bontani két, legalább első fokú egész együtthatós polinom szorzatára. Vannak-e olyan $a_1, \ldots, a_n$ egész számok, amelyekre a $p(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$ polinom boldogságot okoz Poszeidonnak?

2.3. Bursics Balázs

BB/1. Poszeidón 200 rozmárja rozmárfocizni szeretne, ám 101 db néhány fős klikk alakult közöttük, amelyekben az összes tag egy csapatba kíván tartozni (a klikkek lehetnek egyfősek is, a rozmárfocit két csapat játssza). Poszeidón segíteni akar nekik, ezért az alábbi módon oszt csapatokat: a klikkeket létszám szerinti csökkenő sorrendben osztja be együtt egy csapathoz úgy, hogy ha ugyanannyi tagja van a két csapatnak, akkor az első csapathoz, ha nem, akkor a kisebb létszámúhoz teszi a klikket. Mennyi az esélye annak, hogy a klikkek úgy alakultak, hogy Poszeidón segítsége hathatós, azaz két egyenlő létszámú csapat jön létre?

BB/2. Poszeidón tornasorba rendezte a barnásszürke és a szürkésbarna rozmárjait, de az elsőt tévedésből az utolsó helyre állította. A rozmárok vissza szeretnének állni a helyes sorrendbe, de a tornasorban szigorú szabályok vannak: egyszerre csak két rozmár cserélhet helyet (nem feltétlen szomszédosak) . Bizonyítsuk be, hogy valamikor két különböző színű rozmár fog helyet cserélni.

BB/3. Poszeidón 6 pontszerű rozmárja úgy helyezkedik el egy síkon, hogy semelyik három sincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük két olyan (nem feltétlenül diszjunkt) rozmárhármas, amelyek által meghatározott két háromszögben a legkisebb szög különböző.

BB/4. Poszeidón kedvenc rozmárja a szülinapjára egy labdát kért, amin egy kocka csúcsai vannak kijelölve. Poszeidónnak labdája ugyan van (ami gömb alakú), de a mintához csak egy olyan gömbsapkája van, amit tetszőlegesen ráilleszthetünk a gömbre és a határvonala (éle) mentén gömbi legnagyobb kört (főkört) rajzolhatunk. A sapka élén fokbeosztás van $0° - 360°$-ig. Hogyan tudná ezzel kijelölni a gömbön egy kocka csúcsait?

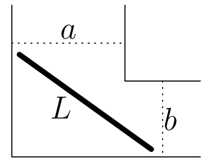
BB/5. Poszeidón egy nap a homokba rajzolgatott a tengerparton, és tanácsadó rozmárjai segítségével ezt az ábrát alkotta: Az r sugarú k kör középpontja O. Tükrözzük O-t a kör egy r hosszúságú AB húrjára, tükörképét jelölje D. C a körvonal tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy $CA^2 + CB^2 = CD^2$.

BB/6. Poszeidón kerekasztalánál 50 rozmár ül. Közülük 15-öt el akar küldeni lubickolni a lagúnába. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha nem akar szomszédos rozmárokat kiválasztani?

BB/7. Poszeidón egyik rozmárja tíz ízletes halat fogott, amit a rozmárpiacon el szeretne adni darabonként egy korallkoronáért. Ám a szagukon érzi, hogy pontosan egy hal megromlott, de nem tudja melyik, a rozmárpiacon viszont nem adhat el romlott halat. Ezért elzarándokol a Bölcs Rozsomákhoz, aki n db halról meg tudja jósolni, hogy van -e köztük romlott, de ha egy jóslás során volt a halak között romlott, akkor a többi is megromlik. A Bölcs minden mérésért egy korallkoronát kér. Mennyi a rozmár által biztosan elérhető legnagyobb nyereség?

2.4. Szakály Marcell

SzM/1. A Bölcs Rozsomák szigonyjavító műhelyének bejárata egy a szélességű folyosó amely derékszögben elkanyarodik és b szélességű lesz. A rozsomák szeretné tudni melyik az a leghosszabb szigony, amit élére állítva (azaz hogy egy szakasz legyen) be lehet hozni javításra.

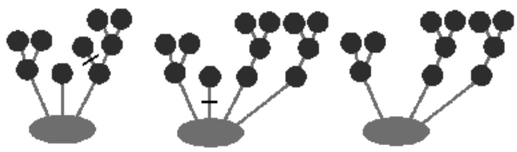


SzM/2. Poszeidón kerek asztalánál végtelen sok rozmár ül egyenletesen elosztva. Poszeidón bemelegítő feladatként azt kérte tőlük hogy határozzák meg két rozmár átlagos távolságát. Tudsz nekik segíteni?

SzM/3. Poszeidón négy pontszerű rozmárja labdázik a tengerparton, az általuk alkotott konvex négyszög területe 32m^2. A négyszög két átellenes élének, és egy átló hosszának az összege 16m. Milyen távol állhatnak egymástól a másik átló rozmárjai?

SzM/4. Poszeidón rozmárjai érdekes játékot játszanak. A játékot 6 rozmár játssza, akik n-től $n+5$-ig vannak számozva. Poszeidón akkor boldog ha ketté tudnak úgy válni hogy a két rész rozmárjainak számainak szorzata megegyezzen. Milyen n-ekre lesz Poszeidón boldog?

SzM/5. (**A megoldóknak Zeusz további kérdéseket is tud adni!**) Poszeidón látogatást tett Hadész testvérénél az alvilágban amikor összetalálkozott a félelmetes Démonnal. A Démon sok fejéről még további és további fejek lógtak le, egy hatalmas véges fagráfot képezve. Poszeidón egyszer hallotta a Bölcs Rozsomáktól, hogy a Démon fejeit nem lehet könnyen levágni. Minden vágással csak olyan fejet vághat le, amiről már nem lóg le több, ám ekkor a Démon új fejeket növeszt az alábbi szabály szerint: Tekinti azt a P fejet amit levágtak. Ha ez a testről nőtt le, semmi sem történik. Ha nem, tekinti azt a Q fejet amiről lenőtt, majd



(A) verzió: A testről megnöveszti a Q gyökerű rész-Démont.

(B) verzió A Q fej testvéreként megnöveszti még egyszer a Q gyökerű rész-Démont.

Sajnos nem maradt feljegyzés a pontos történtekről és a Démon kezdeti alakjáról. Zeusz szeretné tudni hogy Poszeidónnak sikerülhetett-e levágni minden fejet, vagy el kellett menekülnie?

SzM/6. Poszeidón elküldte a Bölcs Rozsomákot az elvarázsolt erdőbe. Az erdő útjai egyre csak elágaznak, egy hatalmas fagráfot alkotnak. A Rozsomák azt állítja hogy az erdőben tetszőlegesen hosszan barangolhat anélkül hogy vissza kéne fordulni, de előbb utóbb mindig egy zsákösvényre érkezünk.

Van-e az erdőben biztosan olyan tisztás amelyről végtelen sok út indul ki?

SzM/7. Poszeidón lesimította kedvenc tengerpartján a homokot. A parton fekszik egy vonalszerű faág. A faágat a rozmárok körbe szeretnék forgatni hogy végül saját régi helyén feküdjön a másik irányba. Sajnos az ág nagyon nehéz, így felemelni nem tudják, csak a homokon tolni. Azt szeretnék hogy az elsimított homok legkisebb felületét karcolják fel a munka során. Mi a legjobb amit el tudsz érni. (A csapatok a legjobb konstrukcióban versenyeznek, nem kell bizonyítani hogy jobbat nem lehet)

3. Szilvafa

Keresztfalvi Bálint, Lakatos Ádám
Nagy Dávid, Pap Benedek

3.1. Keresztfalvi Bálint

KB/1. Van-e olyan csupa különböző pozitív egész számból álló számtani sorozat, amelynek egyik tagja sem osztható 1-nél nagyobb négyzetszámmal?

KB/2. Bergengócia statisztikai hivatala szerint ha két lakos ismeri egymást, akkor nekik pontosan egy közös ismerősük van, ha nem ismerik egymást, akkor legalább tíz közös ismerősük van. Lehetséges-e, hogy a statisztikai hivatal információi pontosak?

KB/3. Létezik-e olyan pozitív egész n, hogy tetszőleges nem 0 i számjegy esetén az n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $2000n$ számok mindegyikének tízes számrendszerbeli alakjában ugyanannyiszor fordul elő az i?

KB/4. Az $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ folytonos függvényekre teljesül, hogy $f(0) = g(0) = 0$ de $g(x)$ semmilyen pozitív x esetén sem 0. Teljesítik továbbá minden $x, y \in [0, \infty)$ esetén az

$$f\left(x + g\left(f\left(x\right)\right)\right) = f(x)$$

függvényegyenletet. Bizonyísd be hogy minden pozitív x-re $f(x) = 0$.

KB/5. ABC háromszögben legyen D, E, F a beírt kör érintési pontjai rendre a BC, CA és AB szakaszokkal. Legyen K AD és a beírt kör D-től eltérő metszéspontja, és M az EF egyenes és a K-n átmenő AD-re merőleges egyenes metszéspontja. Bizonyísd be hogy AM párhuzamos BC-vel.

KB/6. A sakktábla néhány mezőjének behúzzuk egy-egy átlóját úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja. Legfeljebb hány átlót rajzolhatunk így meg?

KB/7. Az f polinomra teljesül, hogy $f(x^2 + 1) - f(x^2 - 1) = 4x^2 + 6$. Határozzuk meg az $f(x^2 + 1) - f(x^2)$ polinomot.

3.2. Lakatos Ádám

LÁ/1. Adj meg egy olyan z pozitív számot, amelyre tetszőleges pozitív egész n esetén $[z^n] - n$ páros. *Az* $[x]$ *egy valós* x *szám egész részét jelöli.*

LÁ/2. Van-e olyan folytonos $[0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény, amely minden értékét véges, mégpedig páros sokszor veszi fel?

LÁ/3. Igaz-e, hogy bárhogyan is írjuk egy 1989 csúcsú konvex test csúcsaira a $-1, +1$ számokat, lesz a testnek olyan csúcsa, hogy az ebbe futó élek másik végpontjaihoz írt számok szorzata $+1$.

LÁ/4. A kétdimenziós koordináta-rendszer rácspontjain egy szemmel láthatatlan bolha ugrál. Az origóból indul, és minden perc tizedik másodpercében az u_1, u_2, u_3 vektorok valamelyikével ugrik arrébb, esetleg nem mozdul. Az általunk is ismert u_1, u_2, u_3 vektorok nem fekszenek egy félsíkban. Mi minden perc ötvenedik másodpercében megmérgezhetünk két rácspontot. Ha a bolha éppen ezek egyikén áll, vagy később mérgezett rácspontra ugrik, akkor meghal. El tudjuk-e pusztítani a bolhát?

LÁ/5. Létezik-e olyan, 103-mal osztható pozitív egész n, amire $2^{2n+1} \equiv 2 \pmod{n}$?

LÁ/6. Jelöljük az ABC háromszögben A_1-gyel, B_1-gyel, illetve C_1-gyel a magasságvonalak talppontjait. Legyen P a C_1 pont merőleges vetülete az A_1B_1 egyenesen, és legyen Q az A_1B_1 egyenesen az a pont, amelyre $AQ = BQ$. Igazoljuk, hogy $PAQ\sphericalangle = PBQ\sphericalangle = PC_1C\sphericalangle$.

LÁ/7. Bizonyítsd be, hogy egy hegyesszögű háromszögben mindig van egy érintő ellipszis (érinti mindhárom oldalt), aminek két fókusz pontja a háromszög magasságpontja, illetve körülírt körénekközppontja!

3.3. Nagy Dávid

ND/1. Az (a_i) sorozat első tagja 2. A második tagtól kezdve az n. tag $a_1a_2\dots a_{n-1}+1$-nek a legnagyobb prímosztója. Szerepel ebben a sorozatban az 5? És a 11?

ND/2. Adottak k és n pozitív páratlan számok és $H_1, H_2, \dots H_n$ halmazok úgy, hogy $|H_i| = k$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ és $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \{1, 2, \dots, nk\}$. Legyen H_i mediánja m_i és $\{m_1, m_2, \dots, m_{nk}\}$ mediánja M. Határuzzuk meg M legnagyobb lehetséges értékét.

ND/3. Legyen A egy pozitív egészekből álló halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan véges, pozitív egészekből álló B halmaz, hogy $A \subseteq B$ és $\prod_{x\in B} x = \sum_{x\in B} x^2$.

ND/4. Adott a síkon $6n$ darab általános helyzetű pont. Bizonyítsuk be, hogy három egy ponton átmenő egyenessek feloszthatjuk a síkot úgy, hogy mindegyik részben ugyanannyi pont legyen.

ND/5. Legyen ABC háromszög beírt körének középpontja I. Legyen D a BC oldal tetszőleges pontja és ω_B és ω_C az ABD és ACD háromszögek beírt körei, amik E-ben és F-ben érintik a BC oldalt. Legyen P az AD szakasz metszéspontja az ω_B és ω_C középpontját összekötő egyenessel. Legyen X a BI és CP metszéspontja, valamint Y a CI és BP metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy EX és FY egyenesek ABC beírt körén metszik egymást.

ND/6. Egy iskolában b tanár és c diák van. Minden tanár pontosan k diákot tanít és bármely két diákhoz pontosan h tanár található, aki mindkettőjüket tanítja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}.$$

ND/7. Keressük meg az összes $P(x)$ egész együtthatós polinomot, amire $n \mid P(2^n)$ minden pozitív egész n-re.

3.4. Pap Benedek

PB/1. Egy körön kiszínezünk 2017 pontot kékre, a maradék pontokat pirosra. Lásd be, hogy bármely $n \geq 3$ természetes számra létezik olyan szabályos n-szög, amely minden csúcsa piros pont.

PB/2. Egy számot szerencsésnek nevezünk, ha előáll olyan pozitív egészek összegeként, amelyek reciprokösszege 1. A $11 = 2 + 3 + 6$ és a $4 = 2 + 2$ például szerencsés számok, hiszen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Szerencsés szám-e a 2005?

PB/3. Mely k pozitív egész esetén fordul elő az 1 az (a_n) sorozat elemei között, ha $a_1 = k$, és $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, ha a_n páros, illetve $a_n + 1 = a_n + 5$, ha a_n páratlan?

PB/4. A p_n sorozatot rekurzívan definiáljuk. Legyen $p_1 = 2$ és p_{n+1} legyen $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ legnagyobb prímosztója. Szerepel-e a sorozatban a 11?

PB/5. Mely n pozitív egész számokra létezik $k \geq 2$ pozitív racionális $a_1, a_2, ..., a_k$ szám úgy, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \prod_{i=1}^{k} a_i = n?$$

PB/6. Az ABC háromszög izogonális pontja I (az a pont a háromszög belsejében, amelyre $AIB\sphericalangle = BIC\sphericalangle = CIA\sphericalangle = 120°$). Bizonyítsuk be, hogy az ABI, BCI és CAI háromszögnek Euler-egyenesei egy ponton mennek át.

PB/7. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a > b > c > d > 0$ egész számokra

$$a^2 + ac - c^2 = b^2 + bd - d^2$$

fennáll, akkor $ab + cd$ összetett.

4. Wham!

Janzer Lili, Vankó Mila
Záhorský Ákos, Zólomy Kristóf

4.1. Janzer Lili

JL/1. Az x, y, z valósakra $x + y + z = 0$. Bizonyítsd be, hogy:

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0$$

Milyen számokra teljesül az egyenlőség?

JL/2. Egy családnak 3 ugyanakkora szennyesládája van, egy a fehér, egy a fekete és egy a színes ruháknak. Az első héten mindhárom üres. Ezután minden héten 10 kg-nyi szennyest termelnek (tetszőleges színeloszlással), és a hét végén a(z egyik) legnehezebb szennyesláda tartalmát kimossák (ezután a láda üres lesz). Legalább mekkoráknak kell lenniük a ládáknak, hogy biztosan ne telítődjenek túl?

JL/3. Bizonyítsd be, hogy minden bijektív $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény felírható $f = u + v$ alakban, ahol $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bijektív függvények.

JL/4. Legyenek m és n relatív prím pozitív egészek. Milyen számpárokra mennyi az $5^m + 7^m$ és az $5^n + 7^n$ számok legnagyobb közös osztója?

JL/5. Az általános ABC háromszögben legyen A' az A-ból induló szögfelező metszéspontja a BC oldallal. Hasonlóan definiáljuk a B' és C' pontokat. Legyen A'' az AA' felezőmerőlegesének és a BC oldalnak a metszéspontja. Hasonlóan legyen B'' a a BB' felezőmerőlegesének és az AC oldalnak a metszéspontja, C'' pedig a CC' felezőmerőlegesének, és az AB oldalnak a metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy ekkor A'', B'', és C'' egy egyenesre esnek!

JL/6. Tegyük fel, hogy A a prímek egy véges részhalmaza, a pedig egy pozitív egész. Bizonyítsd be, hogy csak véges olyan m létezik, amire az $a^m - 1$ prímosztói mind A elemei.

JL/7. Tegyük fel, hogy egy n pontú G egyszerű gráf fokszámainak M minimuma legalább $3n/4$. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek bármely 2-színezésében van olyan legalább $M + 1$ pontú összefüggő részgráf, melynek minden éle ugyanolyan színű.

4.2. Vankó Mila

VM/1. Melyek azok a számtani sorozatok, amelyekben az első n elem összege minden n-re négyzetszám?

VM/2. A G gráfnak egy S feszített részgráfját *domináns*nak nevezzük, ha G minden S-en kívüli csúcsának van szomszédja S-ben. Létezik-e olyan gráf, aminek páros számú számú domináns részgráfja van?

VM/3. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög, aminek AC és BD átlói E-ben metszik egymást. AD és BC A-n és B-n túli mghosszabításai F-ben metszik egymást. Legyen G egy olyan pont, amire $ECGD$ parallelogramma, és legyen H E tükörképe AD-re. Ekkor lássuk be, hogy D, H, F és G egy körön van.

VM/4. Sorban le van írva néhány pozitív egész szám, Alice minden lépésben kiválaszt két szomszédos számot, x-et és y-t, úgy, hogy $x > y$ és x balra van y-tól, és lecseréli az (x, y) párt $(y+1, x)$-re vagy $(x-1, x)$-re. Lássuk be, hogy csak véges sokszor tudja elvégezni ezt a lépést.

VM/5. Az $ABCDEF$ gömbhatszög csúcsai és oldalívei egy félgömbön helyezkednek el. Az AB oldalív merőleges a BC ívre, az AF ív merőleges az EF oldalívre, továbbá $AB = AF$, $BC = CD$, és $DE = EF$. Igazoljuk, hogy az AD és CE főkörívek merőlegesek egymásra.

VM/6. Létezik-e olyan nem azonosan nulla függvény a síkon, amelynek bármely szabályos ötszög csúcsain fölvett értékeit összeadva mindig nullát kapunk?

VM/7. Határozzuk meg az összes olyan prímet, amire $5^p + 4p^4$ négyzetszám.

4.3. Záhorský Ákos

ZÁ/1. Egy $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ függvényt *halálpontos*nak mondunk, hogyha $f^{(f(k))}(k) = k$ minden n-nél nem nagyobb pozitív egészre. Mutasd meg, hogy egy halálpontos függvénynek legalább $P(n) + 1$ fixpontja van, ahol $P(n)$ a $(\sqrt{n}, n]$ intervallumra eső prímek száma.

ZÁ/2. Legyen $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ a következőképp definiálva:

$$f(n) = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}.$$

Igazoljuk, hogy a függvénynek 3 felső korlátja.

ZÁ/3. Igazold az alábbi ekvivalenciát p, q prímekre, ahol $q \neq 2$:

$$q \mid (x+1)^p - x^p \iff q \equiv 1 \pmod{p}$$

ZÁ/4. Egy $(n+1) \times (n-1)$-es sakktábla mezőit 3 színnel festjük, úgy, hogy négy azonos színű mező ne alkosson tengelypárhuzamos téglalapot. Mely n-ekre lehetséges ez?

ZÁ/5. Egy $2n$ tagú baráti társaság szeret vitorlázni, de csak egy n férőhelyes vitorlásuk van. Hány naposra szervezzék a közös balatonozást, ha minden nap 1 vitorlásútra van idő, és mindenki mindenkivel szeretne egyet közösen vitorlázni?

ZÁ/6. Adott $ABCD$ négyszögben az AC szakasz P felezőpontja és

$$BAD\sphericalangle = BPC\sphericalangle = CPD\sphericalangle.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor $ABCD$ húrnégyszög.

ZÁ/7. Van $2n$ golyócskánk 1-től $2n$-ig számozva, fele fehér, a többi fekete. Lépésenként egy golyót húzunk ki a zsákból, amibe szórtuk őket, aztán kiválaszthatunk egy fehér és egy fekete golyót, félretehetjük őket, és leírharjuk különbségüket egy lapra. n-től függően mekkora számot kaphatunk a leírt számok összegeként?

4.4. Zólomy Kristóf

ZK/1. Hófehérke és 18 törpéje vacsoránál egy köralakú asztalnál ülnek, szeretnének úgy leülni, hogy minden nap mindenki más mellett üljön (senkinek ne legyen kétszer ugyanaz a szomszédja). Maximum hány estén keresztül tudnak így leülni?

ZK/2. Legyen N pozitív egész, $a_1, a_2, \cdots, a_N$ pozitív egészek, és nem mindegyik többszöröse 2^{N+1}-nek. Minden $n \geq N+1$-re, definiáljuk a_n-et:

Ha a_k 2^n-nel osztva a legkisebb maradékot adja $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 2^n-nel vett maradékkai közül, legyen $a_n = 2a_k$.

Bizonyítsd be, hogy létezik olyan M, amire $a_n = a_M$ minden $n \geq M$-re.

ZK/3. Döntsük el, hogy igaz-e a következő állítás. Ha adott a térben n piros pont, akkor mindig elhelyezhető $3n$ kék pont úgy, hogy a piros pontok által meghatározott minden tetraéder belsejében van legalább egy kék.

ZK/4. Az a, b, c, d nemnegatív számokra $a \leq 1$, $a+b \leq 5$, $a+b+c \leq 14$ és $a+b+c+d \leq 30$. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10$.

ZK/5. Legyenek az a, b, c, d olyan pozitív egészek, melyekre $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Bizonyítsuk be, hogy $a+b+c+d$ összetett szám.

ZK/6. A hegyesszögű ABC háromszög körülírt köréhez érintőket húzunk az A, B és C csúcsokban. Tekintsük azt a PQR háromszöget, amelynek ezek az érintők az oldalai, a betűzést úgy választva, hogy C a PQ oldalon helyezkedjék el, B a PR oldalon, végül az A a QR oldalon. Jelölje C_1 az ABC háromszög C-ből induló magasságának a talppontját az AB oldalon. Bizonyítsuk be, hogy CC_1 felezi a QC_1P szöget.

ZK/7. Nevezzük betűk véges hosszúságú sorozatát szónak. Egy szóval a következő műveleteket végezhetjük:

a) Elhagyjuk az első vagy az utolsó betűjét;

b) A szót „megduplázzuk”, azaz a szó két példányát egymás után írjuk.

Eljuthatunk-e ilyen lépésekkel az ABCD...XYZ szótól a ZYX...DCBA szóhoz?

5. Different ways

Al-Sayyed Zakariás, Bötkös Benedek, Mészáros Anna, Saár Patrik

5.1. Al-Sayyed Zakariás

ASZ/1. Tekintsünk egy S halmazt és a halmazon egy kétváltozós $*$ műveletet (tehát bármely két S-beli a, b esetén $a * b$ is S-beli). Tegyük föl, hogy $(a * b) * a = b$ teljesül minden S-beli a, b-re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a * (b * a) = b$ is teljesül minden S-beli a, b-re.

ASZ/2. Mely $m > 1$ egészekre létezik az $1, 2, \ldots, m$ számoknak olyan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sorrendje, hogy az

$$a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

összegek mind különböző maradékot adnak m-mel osztva?

ASZ/3. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek a köré írt körének középpontja legyen O. Rendre legyenek D, E, F, a magasságok talppontjai A, B, C csúcsokból. Legyen M pont a BC oldal felezőpontja. X pont az AD és EF szakaszok metszéspontja és Y pedig AO és BC szakaszok által meghatározott egyenesek metszéspontja és Z pont pedig XY felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy A, Z, és M egy egyenesre esnek!

ASZ/4. Legyenek a, b, c, d pozitív valós amikre teljesül: $abcd = 1$. Bizonyítsuk be, hogy:

$$(a^2b + b^2c + c^2d + d^2a)(ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2) \geq (a + c)(b + d)(ac + bd + 2).$$

Mikor van egyenlõség?

ASZ/5. Legyen $H = \{1, 2, ..., 2006\}$. Jelölje D a H halmaz azon részhalmazainak a számát, amelyekben az elemek összegét 32-vel osztva 7-et kapunk maradékul, és jelölje S a H halmaz olyan részhalmazainak a számát, amelyekben az elemek összegét 16-tal osztva 14-et kapunk maradékul. Igazoljuk, hogy $S = 2D$.

ASZ/6. Hány darab 150 jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melynek minden jegye páratlan és bármely két szomszédos számjegy eltérése 2?

ASZ/7. Az ABC hegyesszögű háromszög belsejében, az A csúcsból induló szögfelezőn felvettük az M pontot. Az AM, BM, CM egyeneseknek a körülírt körrel való második metszéspontja rendre A_1, B_1 és C_1. Az AB és a C_1A_1 egyenesek az L pontban, az AC és a B_1A_1 egyenesek az N pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az LN szakasz párhuzamos BC-vel.

5.2. Bötkös Benedek

BB/1. Egy baktérium minden másodpercben p valószínűséggel elpusztul, $1-p$ valószínűséggel pedig osztódik két ugyanolyan baktériummá (a leszármazottak egymástól függetlenül pusztulnak el, vagy osztódnak). Mekkora annak a valószínűsége, hogy a baktérium kihal?

BB/2. Bizonyítsuk be, hogy minden $n!$-nál nem nagyobb pozitív egész szám felírható az $n!$ legfeljebb n darab különböző osztójának összegeként.

BB/3. Tudjuk, hogy:

$$\log_a b + \log_b a + \log_a c + \log_c a + \log_b c + \log_c b = \log_2 3 + \log_3 2 + \log_2 5 + \log_5 2 + \log_3 5.$$

Mennyi lesz $(\log_a b + 1)(\log_b c + 1)(\log_c a + 1)$?

BB/4. Legyen p egy ötnél nagyobb prím. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan a pozitív egész, hogy $1 \leq a \leq p-2$ és sem $a^{p-1}-1$ -nek sem $(a+1)^{p-1}-1$ -nek nem osztója p^2.

BB/5. Minden n természetes számhoz vegyük n prímosztóinak a legnagyobb hatványát, amelyik még nem nagyobb n-nél, és ezek összegét nevezzük az n-hez tartozó hatványösszegnek. (Pl. a 100-hoz tartozó hatványösszeg $2^6 + 5^2 = 89$.) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan szám van, amelyikhez tartozó hatványösszeg nagyobb a számnál.

BB/6. ABC háromszög $BAC\sphericalangle$-ből induló belső szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. k kör érintse a BC oldalt és menjen át A és D pontokon. k kör az AB és AC egyeneseket rendre E és F pontokban metszi. k kör az EC és FB egyeneseket rendre P és Q pontokban metszi. Az AP és AQ metszéspontjai a BC egyenessel legyenek X és Y. XY szakasz hányad része a BC oldalnak?

BB/7. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden (x, y) értékre kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x \\ f(x+y) &\leq f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy minden valós x-re $f(x) = x$.

5.3. Mészáros Anna

MA/1. Legyen x_1 pozitív, 1-nél kisebb szám. Képezzük az

$$x_{k+1} = x_k - {x_k}^2 \quad (k = 1, 2, ...)$$

sorozatot. Bizonyítsd be, hogy minden pozitív n egész számra

$${x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2 < \frac{2014}{2013}$$

MA/2. Van egy zsebrádiónk, amely két ceruzaelemmel működik. A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezünk kettőt a készülékbe, és ha az szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szól, akkor legalább az egyik rossz. Legalább hány kísérletre van szükség ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

MA/3. Az ABC háromszög szögei $CAB\sphericalangle = 75°$ és $ABC\sphericalangle = 60°$. Legyenek az ABC háromszög magasságpontjának a BC, CA és AB oldalakra vonatkozó tükörképei rendre az X, Y és Z pontok. Közelítő értékek használata nélkül határozza meg az XYZ és ABC háromszögek területének arányát!

MA/4. Két játékos előtt egy-egy kavicskupac található, kezdetben mindkettőben k kavics van. Először az első játékos ezekhez hozzátesz összesen 2008 újabb kavicsot, az új kavicsokat tetszőlegesen oszthatja el a két kupac között (akár az összeset is az egyik kupacba teheti). Ezután a második játékos tesz hozzá a kupacokhoz összesen 2008 újabb kavicsot, és ugyanígy folytatják felváltva. Az nyer, akinek a kupacában (a saját vagy ellenfele lépése után) a kavicsok száma négyzetszám, míg ellenfele kupacára ez nem igaz (ha mindkét kupac ilyen, akkor a játékot folytatják). Van-e végtelen sok k-ra a második játékosnak nyerő stratégiája?

MA/5. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-hez található n darab szomszédos pozitív egész szám úgy, hogy egyikük sem egyenlő egy prímszám pozitív egész kitevőjű hatványával.

MA/6. Egy hegyesszögű háromszög területe egységnyi. Bizonyítandó, hogy van olyan belső pontja, amelynek a csúcsoktól mért távolságai legalább $\frac{2 \cdot \sqrt[4]{3}}{3}$ hosszúságúak!

MA/7. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számokra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{a_1}{a_2 + \cdots + a_n}\right) + \left(\frac{a_2}{a_3 + \ldots + a_1}\right) + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_1 + ... + a_{n-1}}\right) \geq \frac{n}{(n-1)}.$$

5.4. Saár Patrik

SP/1. Egy 3×3-as táblázat mezőibe úgy írtuk be az $1, 2, \ldots, 9$ számokat, hogy mind a négy 2×2-es négyzeten belül ugyanannyi a számok összege. Mi lehet ez az összeg?

SP/2. Egy kör kerületén egymástól függetlenül, véletlenszerűen felvesszük az A, B, C és D pontokat. Mi annak a valószínűsége, hogy az AB és a CD húrok metszik egymást?

SP/3. Anna és Bálint a következő játékot játsszák: Anna rajzol egy tetszőlegesen nagy üres (azaz él nélküli) gráfot, majd egyesével behúz tetszőleges éleket, amelyeket Bálint közvetlenül a behúzás után kékre vagy pirosra színez. További szabály, hogy az így keletkező gráfban minden csúcs foka legfeljebb k lehet, és k értékében előre megállapodnak. Melyik az a legkisebb k, amely mellett Anna ügyes játékkal mindenképpen létre tud hozni egy 2011 hosszúságú egyszínű utat?

SP/4. Az $1, 2, \ldots, 2014^{2014}$ számok közül Aladár és Boglárka felváltva törölnek le egy számot (Aladár kezd), amíg csak két szám marad. Ha a megmaradó két szám összege négyzetszám, akkor Boglárka nyer, egyébként Aladár. Kinek van nyerő stratégiája?

SP/5. Egy törpe a koordinátarendszerben az origóból a $(2; 2)$ pontba szeretne eljutni. Minden lépése 1 egység le, fel, jobbra vagy balra. A lépés irányát minden lépésnél azonos valószínűséggel választja. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 7 lépéssel a $(2; 2)$ pontba jut?

SP/6. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$[x] = x^4 - 2x^2.$$

SP/7. Egy 12 tagú társaságban bármely 9 ember között van 5 olyan, akik valamennyien ismerik egymást. Bizonyítsuk be, hogy létezik a társaságnak 6 olyan tagja is, akik ismerik egymást.

6. Különbség

Csizmadia Viktória, Kerekes Anna, Márton Dénes, Matolcsi Dávid

6.1. Csizmadia Viktória

CsV/1. Legyenek a és b különbözõ paritású pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $(a+3b)(5a+7b)$ nem lehet tökéletes négyzet.

CsV/2. Ha x, y, z és w valós számok, és tudjuk, hogy

$$\frac{x}{y+z+w}+\frac{y}{z+w+x}+\frac{z}{w+x+y}+\frac{w}{x+y+z}=1,$$

akkor mennyi az

$$\frac{x^2}{y+z+w}+\frac{y^2}{z+w+x}+\frac{z^2}{w+x+y}+\frac{w^2}{x+y+z}$$

kifejezés értéke?

CsV/3. Mennyi az $xy+yz+zx$ összeg, ha x, y és z olyan pozitív valós számok, amelyekre teljesülnek az $x^2+xy+y^2=9$, az $y^2+yz+z^2=16$ és a $z^2+zx+x^2=25$ egyenletek?

CsV/4. Az ABC háromszögben $AB=12$ cm, $BC=24$ cm, az általuk közbezárt szög 120°. Hány centiméter hosszú a B csúcsból induló belső szögfelező háromszögbe eső szakasza?

CsV/5. Mennyi az

$$x^{17}-12x^{16}+12x^{15}-12x^{14}+12x^{13}-12x^{12}+\cdots+12x^3-12x^2+12x-1$$

polinom $x=11$ helyen vett helyettesítési értéke?

CsV/6. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész szám kiszínezhetõ 3 szín valamelyikével úgy, hogy teljesülnek a következõ feltételek:

i) Minden $n\in\mathbb{N}_0$ számhoz az összes x, amire igaz, hogy $2^n\le x<2^{n+1}$ ugyanolyan színű.

ii) Nincsenek olyan pozitív egész x, y és z számok, amelyek egyforma színűek és igaz rájuk, hogy $x+y=z^2$ (kivéve az $x=y=z=2$).

CsV/7. Az $A(-1;7)$, a $B(11;3)$, a $C(-2;0)$ és a $D(14;0)$ pontok a derékszögű koordinátarendszer pontjai. Melyek azok az x tengelyen lévõ P pontok, melyekre $APC\sphericalangle+BDP\sphericalangle=90°$?

6.2. Kerekes Anna

KA/1. Keressük az összes olyan prím p-t és q-t, amelyekre $pq \mid 5^p + 5^q$.

KA/2. Legyenek a, b, c, d pozitív valósak úgy, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Bizonyítsuk be a következõt:

$$\frac{a^2+b^2+3}{a+b} + \frac{b^2+c^2+3}{b+c} + \frac{c^2+d^2+3}{c+d} + \frac{d^2+a^2+3}{d+a} \geq 10.$$

KA/3. Egy háromszög köréírt körének sugara R, az oldalai pedig a, b, c és tudjuk a következőt: $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$. Mekkorák a háromszög szögei?

KA/4. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Legyen BC felezőpontja D, legyen a B-nél lévő szög szögfelezőjének metszéspontja AC-vel E és legyen C-hez tartozó magasság talppontja F. Tegyük fel, hogy $FDE\sphericalangle = BCA\sphericalangle, DEF\sphericalangle = CAB\sphericalangle, EFD\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Bizonyítsuk be, hogy ABC szabályos.

KA/5. Keressük az összes olyan függvényt, amely a nem negatív valósakból a nem negatív valósakba képez úgy, hogy

$$f(x^2) + f(y) = f(x^2 + y + xf(4y))$$

teljesül minden (x, y) nemnegatív valós számpárra.

KA/6. Egy sakkversenyen $2n + 3$ versenyző vesz részt. Bármely két versenyző pontosan egy meccset játszik. Nincs két meccs amelyet egyszerre játszanak, és ha valaki játszott egy meccset, utána legalább n meccsen nem játszik. Bizonyítsuk be, hogy az egyik játékos játszik az első és az utolsó meccsen is.

KA/7. $P(x)$ egy valós együtthatós polinom és $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ és

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3).$$

Lássuk be, hogy P-nek van legalább egy valós megoldása.

6.3. Márton Dénes

MDé/1. Mutassuk meg, hogy egy háromszög csúcsain átmenő és a kerületét felező egyenesek egy T pontban metszik egymást, és a háromszög súlypontja harmadolja a beírt kör középpontját T-vel összekötő szakaszt.

MDé/2. Keressük meg az összes olyan x, y egész számokat (ha vannak), amelyekre

$$12x^2 + 14xy + 15 = 8x + 21y.$$

MDé/3. A természetes számok mindegyikét kiszínezzük 1993 szín valamelyikével úgy, hogy mindegyik szín végtelen sokszor előforduljon. Igaz-e, hogy bármely ilyen színezés esetén keletkezik olyan háromtagú számtani sorozat, amelynek mind a három tagja különböző színű?

MDé/4. Bizonyítsuk be, hogy a, b, c pozitív egészekre

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]} = \frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

MDé/5. Adjuk meg az összes egész megoldást:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2.$$

MDé/6. Minden pozitív egész n-re, legyen

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ T_n &= S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n \\ U_n &= \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{3} + \frac{T_3}{4} + \cdots + \frac{T_n}{n+1}. \end{aligned}$$

Keressünk olyan a, b, c, d egészeket, melyekre $0 < a,\ b,\ c,\ d < 1000000$, illetve

$$T_{1988} = aS_{1989} - b \quad \text{és} \quad U_{1988} = cS_{1989} - d.$$

MDé/7. Keressük meg az összes valós $x, y, z \geq 1$ számot, melyekre

$$\min(\sqrt{x + xyz}, \sqrt{y + xyz}, \sqrt{z + xyz}) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

6.4. Matolcsi Dávid

MDá/1. Bizonyítsuk be, hogy $\sin((2n+1)x)$ felírható $\sin x$ polinomjaként. Határozzuk meg a polinom első kettő és utolsó kettő nullától különböző együtthatóját.

MDá/2. Mennyi $\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2n+1})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{2\pi}{2n+1})} + ... + \frac{1}{\sin^2(\frac{n\pi}{2n+1})}$?

MDá/3. Mennyi az $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$ végtelen sor összege? (Elemi megoldást kell találni.)

MDá/4. Jelölje (x) az x-hez legközelebb eső egész számot. Ha $x = k + \frac{1}{2}$, ahol k egész, akkor $(x) = k + 1$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges N pozitív egészre

$$N = \left(\frac{N}{2}\right) + \left(\frac{N}{4}\right) + \left(\frac{N}{8}\right) + \dots.$$

MDá/5. Adott n szám: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Mennyi

$$\sum \frac{1}{a_{k_1}(a_{k_1}+a_{k_2})(a_{k_1}+a_{k_2}+a_{k_3})\cdot \ldots \cdot (a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots+a_{k_n})}$$

ahol a szummában $k_1, k_2, \dots, k_n$ indexrendszer végigfut $1, 2, \dots, n$ összes $(n!)$ permutációján.

MDá/6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímszámra léteznek olyan x és y egészek, hogy $x^2 + y^2 + 1$ osztható p-vel.

MDá/7. Legyenek az ABC hegyesszögű háromszögben D és E a B-ből és C-ből induló magasságok talppontjai. Legyen F a BC oldal felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy FD és FE is érintői az ADE körnek.

7. Ponies Micha

Fuisz Gábor, Győrffy Ágoston,
Szabó Dávid, Szabó Kristóf

7.1. Fuisz Gábor

FG/1. Az asztalon van egy 52 lapos kártyapakli, minden lap lefelé néz. Egy lépésben a legfelső 7 lap alkotta paklit leemeljük a többiről, és megfordítjuk, és a pakli legaljára helyezzük. Hányszor kell megismételnünk ezt a lépést, hogy újból mind az 52 kártya lefelé nézzen?

FG/2. Egy lapra felírták 1-től 2016-ig az összes egész számot pontosan egyszer. Hány páratlan számjegy található a lapon?

FG/3. A mesebeli széfet egy 3 számjegyű kód nyitja. Miután megpróbálkoztunk egy kombinációval, a széf kétféle választ adhat:

- „Hideg”, amennyiben egy számjegy sem talált;
- „Melegszik”, amennyiben legalább 1 számjegy stimmel (ezt a választ kapjuk a helyes nyitókód esetén is).

Minimum hány próbálkozásból lesz elég információnk, hogy ismerhessük meg a nyitókódot?

FG/4. Mutassuk meg, hogy egy konvex n-szög pontosan akkor írható be egy körbe, ha létezik egy a_i, b_i valós számpár minden P_i csúcsára a sokszögnek úgy, hogy minden különböző P_i és P_j között a távolság $a_i b_j - a_j b_i$.

FG/5. Egy egység hosszú pálcát véletlenszerűen eltörünk 2 helyen. Mekkora az esélye, hogy a 3 darabból háromszög alkotható?

FG/6. Adjuk meg az összes valós függvényt, melyre teljesül minden x-re és y-ra, hogy:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

FG/7. Egy tűzszerész szabályos háromszög alakú csatatéren bombákat keres. A detektor sugara éppen a háromszög magasságának a fele. Mekkora a minimális távolság, amit meg kell tennie, hogy a teljes háromszöget átfésülje, ha az egyik csúcsból indul?

7.2. Győrffy Ágoston

GyÁ/1. Mutassuk meg, hogy öt tetszőleges valós szám közül mindig ki lehet választani kettőt (a és b) úgy, hogy teljesüljön $|ab+1| > |a-b|$.

GyÁ/2. Keressük meg az összes olyan prímekből álló $(p; q; r)$ számhármast, amelyekre teljesül, hogy:

$$p \mid q^r + 1; \qquad q \mid r^p + 1; \qquad r \mid p^q + 1.$$

GyÁ/3. Mutassuk meg, hogy ha egy pozitív egész szám több mint egyféleképpen írható fel két négyzetszám összegeként, akkor a szám összetett.

GyÁ/4. Mutassuk meg, hogy pozitív valós $(a; b; c)$ számhármasokra az alábbi egyenlőtlenség fennáll:

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} + \frac{\sqrt{a+b}}{c} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}}.$$

GyÁ/5. Egy asztalon négy darab (nem feltétlenül egyforma) kerek pénzérme van. Minden pénzérme pontosan két másikat érint. Mutassuk meg, hogy a négy érintési pont egy körön van!

GyÁ/6. Egy edző és n focista áll egy körben. Az edző előtt egy labda van. Mindig, amikor valaki előtt van a labda $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel valamelyik szomszédjának passzolja. A játékot akkor fejezik be, ha a labda az utolsó játékoshoz is eljut, akinél még nem volt. A következő mérkőzésen az lesz a csapatkapitány, akihez utoljára ér el a labda. Mutassuk meg, hogy mindegyik játékos ugyanakkora valószínűséggel lesz kapitány!

GyÁ/7. Legyen M az ABC háromszögnek egy belső pontja. Mutassuk meg, hogy:

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + AC + BC.$$

7.3. Szabó Dávid

SzD/1. Egy 3×3-as bűvös négyzetet 9 db 55-nél kisebb pozitív egész szám alkot. Mennyi a négyzetben található prímek számának maximuma? (Egy bűvös négyzetben minden sorban, oszlopban és a két átlóban a számok összege megegyezik.)

SzD/2. Legyen ABC háromszögben A_1 egy tetszőleges pont a BC, B_1 az AC, illetve C_1 az AB oldalon. Legyen A_1 pont tükörképe BC felezőpontjára A_2, hasonlóan határozzuk meg B_2 és C_2 pontokat. Bizonyítsd be, hogy $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek területe megegyezik.

SzD/3. x, y, z és n pozitív egészek. Milyen n-ekre van megoldása az

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$$

egyenletnek?

SzD/4. Egy egység oldalú szabályos 2016-szöget felbontottunk paralelogrammákra. Mennyi lehet egy felbontásban a téglalapok területeinek összege?

SzD/5. A, B és C játékos játszik 1 szabályos dobókockával. A nyerőszáma a 36, B nyerőszáma a 44, C nyerőszáma a 61. A játék menete: Az első dobás értékét leírjuk, majd minden dobás értékét közvetlenül az előző után írjuk. Az a játékos nyer, akinek először jelenik meg a nyerőszáma. Kinek van a legnagyobb, és kinek a legkisebb esélye nyerni?

SzD/6. a, b, c és d pozitív számok, és $a + b + c + d = 4$. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 2.$$

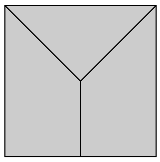
SzD/7. Legyen $ABCDE$ egy konvex ötszög, melyre igazak a következők: BC oldal párhuzamos AE oldallal, $AB = BC + AE$, $ABC\sphericalangle = CDE\sphericalangle$. Legyen CE felezőpontja M, és BCD háromszög beírt körének középpontja O. Bizonyítsd be, hogy ha $DMO\sphericalangle = 90°$, akkor $2BDA\sphericalangle = ABC\sphericalangle$.

7.4. Szabó Kristóf

SzK/1. Tekintsük a Fibonacci-számok $f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n \geq 3)$ rekurzióval meghatározott sorozatát. Tegyük fel, hogy az a és b pozitív egész számokra az $\frac{a}{b}$ tört az $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ és $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ törtek egyikénél kisebb, másikánál nagyobb. Mutassuk meg, hogy $b \geq f_{n+1}$.

SzK/2. Mely $N \geq 3$ egész számok esetén adható meg N pont a síkon úgy, hogy semelyik 3 nem esik egy egyenesre, és a konvex burkuk bármely 3 csúcsa által meghatározott háromszög belsejébe közülük pontosan 1 pont esik?

SzK/3. Mutassunk két olyan egymással nem egybevágó poliédert, amelynek az elölnézete és a felülnézete is az alábbi:



(A belső találkozási pont a négyzet középpontja. A négyzetek szakaszai mind látható élek, de rejtett élekből sincsen más.)

SzK/4. Határozzuk meg az összes olyan $(p; q; r)$ pozitív racionális számokból álló hármast, amelyre

$$p + q + r, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \quad \text{és} \quad pqr$$

mindegyike egész szám.

SzK/5. Legyen n egy 1-nél nagyobb páratlan egész, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pedig adott egészek. Az $1, 2, \ldots, n$ számok mind az $n!$ darab $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ permutációja legyen

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b \neq c$ és $n!$ osztója $(S(a)-S(b))$-nek.

SzK/6. Andor és Patrik egy darab dobókocka segítségével akarnak olyan játékot csinálni, ahol Andor $1-p$, Patrik p eséllyel nyer. Lehetséges-e ez, ha $0 \leq p \leq 1$ irracionális szám.

SzK/7. Vetítsük az $ABCD$ szabályos tetraédert merőlegesen egy a térben fekvő számegyenesre, és legyenek a csúcsok vetületei rendre az a, b, c, d valós számok. Fejezzük ki a tetraéder élhosszát a, b, c és d segítségével.

8. Pingpongosok

Tiszay Ádám, Tran Ádám,
Vári-Kakas Andor

8.1. Tiszay Ádám

TiÁ/1. G gráf minden fokszáma legalább 3. Bizonyítsuk, hogy van benne páros hosszú kör.

TiÁ/2. A táblára kezdetben egy N pozitív egész szám van írva. Peti minden lépésben letöröl egy 1-nél nagyobb számot a tábláról, és felírja helyette a nála kisebb pozitív osztóit. Egyszer észreveszi, hogy a táblán éppen N^2 darab szám van. Határozzuk meg az összes olyan N-t, amely esetén ez az állapot létrejöhet.

TiÁ/3. Legyenek $x_1, x_2, ..., x_{100}$ nemnegatív valós számok, melyekre $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1 (x_{101} = x_1, x_{102} = x_2)$. Adjuk meg az

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$$

kifejezés legnagyobb értékét!

TiÁ/4. Egy n tagú társaságra igaz, hogy ha tetszőlegesen kiválasztunk négy embert, vagy lesz közöttük három, akik mindhárman ismerik egymást, vagy olyan három, ahol senki sem ismeri a másik kettőt. Igazoljuk, hogy lehet úgy két csoportra osztani a társaságot, hogy az egyik csoportban mindenki mindenkit ismerjen, a másikban pedig senki se ismerjen senkit!

TiÁ/5. Sohaország autópálya hálózatára igazak a következők:

- Minden városból minden városba el lehet jutni autópályán;
- Nincs felüljáró/aluljáró, így az autópályák nem keresztezik egymást és nem lehet rajtuk megfordulni (csak a városban);
- Kétirányúak, egymásba csatlakozhatnak;
- A főváros mindenhonnan közvetlenül elérhető (azaz nem kell más városokon átmenni).

Sohaországban a főváros nélkül összesen 100 város van. A tűzvédelem érdekében az országban tűzoltóállomások épülnek. A fővárosban épül egy, ám a maradék 100 városban csak 66 állomást lehet építeni. Megoldható-e ez úgy, hogy ha egy városban nincs állomás, akkor az összes olyan városban legyen, ahonnan az közvetlenül elérhető?

TiÁ/6. Bizonyítsuk be, hogy minden $x, y, z \in \mathbb{N}$ -re $(xy \geq z^2)$ létezik olyan n, amelyre

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \qquad z = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ahol $x_i, y_i \in \mathbb{N}$.

TiÁ/7. Egy 100×100-as tábla minden mezője fekete vagy fehér. A tábla szegélyén az összes mező (398 darab) fekete. Továbbá tudjuk, hogy minden 2×2-es résztáblán van mindkét színű. Bizonyítsuk, hogy van olyan 2×2-es résztábla az eredeti táblán, amelyen 4 mező színe sakktábla-színezést követ!

8.2. Tran Ádám

TrÁ/1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $n > 3$ csúcsú egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} + 2$ éle van, akkor van Hamilton köre. (A Hamilton-kör olyan kör, amely minden csúcsot tartalmaz).

TrÁ/2. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott az AB és AC oldalak hossza, valamint az A csúcsnak a BC oldal C-hez közelebbi harmadolópontjától mért távolsága.

TrÁ/3. Egy kör AB ívének melyik P pontjára maximális az ABP háromszög kerülete?

TrÁ/4. Bizonyítsuk be hogy nem léteznek olyan x, y egész számok amelyekre fennáll:

$$15x^2 - 7y^2 = 9.$$

TrÁ/5. Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekre az $x^3 - 7x + p = 0$ egyenletnek van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1.

TrÁ/6. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sin(x + y) \cdot \sin(x + y) - \cos(x - y) \cdot \cos(x - y) = 1$$

TrÁ/7. Legyen $n > 1$ egész szám, n összes pozitív osztója $d_1, d_2, ..., d_k$, ahol $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Legyen $D = d_1 \cdot d_2 + d_2 \cdot d_3 + \ldots + d_{k-1} \cdot d_k$.
a) Bizonyítsuk be, hogy $D < n^2$.
b) Határozzuk meg az összes olyan n számot, amelyre D osztója n^2-nek.

TrÁ/8. Két játékos előtt egy-egy kavicskupac található, kezdetben mindkettőben k kavics van. Először az első játékos ezekhez hozzátesz összesen 2008 újabb kavicsot, az új kavicsokat tetszőlegesen oszthatja el a két kupac között (akár az összeset is az egyik kupacba teheti). Ezután a második játékos tesz hozzá a kupacokhoz összesen 2008 újabb kavicsot, és ugyanígy folytatják felváltva. Az nyer, akinek a kupacában (a saját vagy ellenfele lépése után) a kavicsok száma négyzetszám, míg ellenfele kupacára ez nem igaz (ha mindkét kupac ilyen, akkor a játékot folytatják). Van-e végtelen sok k-ra a második játékosnak nyerő stratégiája?

TrÁ/9. Egy k élhosszúságú kocka három egy csúcsba futó lapját teljesen le akarjuk ragasztani k^2 darab 3×1 méretű címkével. Milyen k-ra lehet ezt megtenni?

8.3. Vári-Kakas Andor

VKA/1. Létezik-e két olyan irracionális szám (x és y), amire x^y racionális?

VKA/2. Milyen n és k pozitív egészekre lesz $\binom{n}{k}$ prímhatvány?

VKA/3. Melyik az a legnagyobb pozitív egész n szám, melyre össze lehet párosítani az első n fibonacci-számot $(1, 1, 2, \ldots)$ az első n darab n-többszörössel $(n, 2n, \ldots, n^2)$, úgy, hogy minden fibonacci-számhoz különböző n-többszörös tartozzon és minden párban a fibonacci-sorból jövő tag legyen a kisebb?

VKA/4. Egy 10 egység oldalú szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos egyenesekkel egységnyi oldalú szabályos háromszögekre bontottunk fel. Hány olyan szabályos háromszög van, amelynek csúcsai a létrejött szabályos háromszög-rács rácspontjai?

VKA/5. Mutassuk meg, hogy – bármilyen természetes számot jelentsen is n – a következő tört nem egyszerűsíthető

$$\frac{21n+4}{14n+3}.$$

VKA/6. Keresd meg az összes olyan természetes számot, amit nem lehet előállítani néhány (legalább kettő) egymást követő természetes szám összegeként!

VKA/7. Adott a síkon $3n-1$ pont, közülük semelyik három nem esik egy egyenesre. Mutassuk meg, hogy található közöttük $2n$ pont, melyek konvex burka nem háromszög.

9. Tanári feladatok

T/1. Döbrögi erdejében nyárfák és nyírfák nőnek. Döbrögi a következő három állítást fogalmazza meg:

- Minden nyírfától 10 méterre **a)** legalább **b)** pontosan 10 nyárfa nő.
- Mindkét típusú fából ugyanannyi (véges pozitív egész számú) van az erdőben.

Mondhatott-e igazat Döbrögi?

T/2. Bizonyítsuk be Kőnig élszínezési tételét: minden k-reguláris páros gráf élei kiszínezhetők k színnel úgy, hogy minden csúcsban csupa különböző színű él találkozzon.

T/3. Hány szín kell egy n-csúcsú teljes gráf éleinek kiszínezéséhez, ha minden csúcsban csupa különböző színű él kell találkozzon?