

14. szakkör

12.6. feladat: Egy ABC háromszög belsejében található egy P pont. Húzzunk párhuzamosokat P ponton keresztül az AB , BC és CA oldalakkal, legyenek ezek rendre e, f, g . Legyen $e \cap AC = E, e \cap BC = F, f \cap AB = G, f \cap AC = H, g \cap AB = I, g \cap BC = J$. Húzzuk be az EB, GC, JA szakaszokat, melyek egymást X, Y, Z . (EB és AJ metszéspontja X , CG és BE metszéspontja: Y , AJ és GC metszéspontja: Z .) Mutasd meg, hogy AEX, BYG és ZJC háromszögek területeinek összege megegyezik az XYZ háromszög területével.

13.1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha egy trapéz két alapja a és b hosszúságú, akkor annak az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amelyik:

- két hasonló trapézra bontja az eredetit
- keresztülmegy az átlók metszéspontján
- felezi a trapéz területét

ebben a sorrendben megegyezik a és b mértani, harmonikus és négyzetes közepével.

14.1. feladat: Egy ládában háromféle érme van: 10; 50 és 100 forintos. András és Béla egy lépésben mindig kivesznek egy- egy tetszőleges érmét a ládából, és maguk elé teszik. Hány lépést követően fordulhat elő először, hogy a két fiú előtt lévő érmék összértéke egyenlő, de a 10 forintos érmék száma különböző?

14.2. feladat: Egy 8×8 -as táblázatba számokat írunk, minden sarokba 0-t. Tudjuk, hogy Egyik szám sem nagyobb a vele élszomszédos mezőkbe írt számok számtani közepénél. Milyen számok kerülhettek a maradék 60 mezőbe?

14.3. feladat:

- Adott kerületű téglalapok közül melyeknek a legnagyobb a területe?
- Egy 10 cm oldalú négyzet alakú kartonpapírból dobozt akarunk hajtogatni úgy, hogy a sarkokból egyforma kis négyzeteket vágunk ki. Mekkora legyen a kivágott négyzetek oldala, hogy a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjuk a hajtogatás után?

14.4. feladat:

- Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- Legyenek az a, b, c pozitív számok, melyekre $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$. Bizonyítsuk be, hogy $a + b + c \geq 3abc$.

14.5. feladat: Egy körön kijelölünk 2022 különböző pontot, és mindegyikhez hozzárendelünk egy egész számot úgy, hogy mindegyik nagyobb, mint az óramutató járásával ellentétes irányban az őt megelőző két szám összege. Mennyi lehet a pontokhoz rendelt pozitív egészek számának maximuma?