Pálmay Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny
2026. január 16.

A feladatok megoldása

1. feladat. Egy számsorozat első tagja 9994. A sorozat további tagjait úgy képezzük, hogy az előző tag számjegyeinek összegét megszorozzuk öttel és még hozzáadunk kettőt.

a) Írd fel a sorozat második tagját!

b) Mennyi a sorozat 2026. tagja? **(6 pont)**

Megoldás:
A 9994 szám számjegyeivel elvégezzük a szükséges műveleteket:
$9 + 9 + 9 + 4 = 31,\ 31 \cdot 5 = 155,\ 155 + 2 = 157.$
Tehát a sorozat második tagja 157. 2 pont
A sorozat harmadik tagja: $(1 + 5 + 7) \cdot 5 + 2 = 67.$ 1 pont
A sorozat negyedik tagja. $(6 + 7) \cdot 5 + 2 = 67.$ 1 pont
A sorozat harmadik tagjától kezdve minden további tag 67 lesz, mert ugyanazokat a műveleteket végezzük el, tehát a 2026. tag is 67 lesz. 2 pont

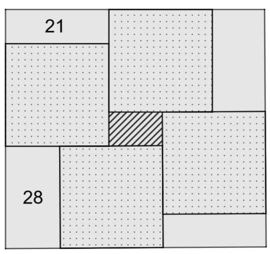
Összesen: 6 pont

2. feladat. Az iskolai matekversenyen minden osztályból egy olyan háromtagú csapat indulhat, amelyben legalább két lány van. A 6.C osztályból jelentkezett négy lány: Anna, Bea, Csilla és Dorina, és két fiú: Zalán és Xavér. Hányféleképpen állhat össze az induló csapat? **(8 pont)**

Megoldás:
Két eset lehetséges: 3 lány van a csapatban, vagy 1 fiú és 2 lány. 1 pont
Az első esetben a 4 lányból 3-at négyféleképpen tudunk kiválasztani, 1 pont
ugyanis ennyiféleképp választhatjuk ki, hogy melyikük marad ki a csapatból 1 pont
A második esetben a 2 lányt hatféleképp választhatjuk ki, 1 pont
ugyanis választunk egy “első” lányt és egy “második” lányt. Ezt $4 \cdot 3$ féleképp tehetjük meg, de a végeredményben nem számít a lányok sorrendje, tehát 2-vel le kell osztani. 2 pont*
A 2 fiú közül 1-et kell választani, ezt kétféleképp tehetjük meg. 1 pont
Vagyis összesen $4 + 6 \cdot 2 = 16$ eset van 1 pont
Megjegyzés: A csillaggal jelölt 2 pontot akkor is megkapja a versenyző, ha a 6 esetet úgy számolja össze, hogy az első lány mellé másik 3-at, a második mellé már csak 2-t, a harmadik mellé 1-et választhatunk ki.

Összesen: 8 pont

3. feladat. Négy egyforma négyzetet az ábrán látható módon összeillesztettünk. A keletkezett téglalapok közül kettőnek a négyzetméterben mért területét megadtuk az ábrán. Mekkora a középen található vonalkázott téglalap területe, ha a téglalapok oldalai méterben mérve egész számok? (Az ábra nem arányos.)



(9 pont)

Megoldás:

A négyzet oldalának hossza osztója 21-nek is és 28-nak is. 1 pont

Ebből következik, hogy vagy 7, vagy 1 m hosszú a négyzet oldala.. 1 pont

Utóbbi esetben nem lehetne összeilleszteni őket az ábrának megfelelően, tehát a négyzet oldala 7 m. 1 pont

A téglalapok másik oldalai 3 és 4 m hosszúak. 1 pont

A vonalkázott téglalap függőleges oldala ugyanakkora, mint a $21\ m^2$ területű téglalap függőleges oldala, mivel a legnagyobb téglalap függőleges oldalának hosszából a négyzet oldalosszának kétszeresét kivonva megkapjuk mindkettőt. 2 pont

Hasonló érveléssel látszik, hogy a vízszintes oldal hossza megegyezik a $28\ m^2$ területű téglalap vízszintes oldalának hosszával. 2 pont

Tehát a vonalkázott téglalap oldalai 3 m és 4 m, vagyis a területe $12\ m^2$. 1 pont

Összesen: 9 pont

4. feladat. Sári gyűjti a matricákat. A füzetébe már beragasztotta a matricák 3/4 részét és még 7 darabot. Hátravan még a matricák 1/5 részénél 2-vel kevesebb matrica beragasztása. Hány matricája van Sárinak? **(10 pont)**

Megoldás:

Mivel Sári a matricák 3/4 részénél 7-tel több darabot ragasztott be, ezért az összes matrica 1/4 részénél 7-tel kevesebb maradt meg. 1 pont

A megmaradt matricák számához 7-et adva tehát az összes matricák negyedét kapjuk. 1 pont

Azt is tudjuk, hogy a még be nem ragasztottak darabszámához 2-t hozzáadva az összes matrica 1/5-ét kapjuk. 2 pont

Tehát a matricák 1/4 része és 1/5 része közötti különbség éppen $7 - 2 = 5$ darab matrica. 2 pont

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ 2 pont

Az összes matrica 1/20 része 5 darab, vagyis összesesn 100 matricája van Sárinak. 2 pont

Megjegyzés: Ha a diák szakaszokkal ábrázolja a matricák darabszámát, és az ábra alapján helyes számításokkal helyes következtetésekre jut, akkor kapja meg a maximális 10 pontot.

Összesen: 10 pont

5. feladat. 64 darab egyforma kis kockából összeragasztottunk egy nagy kockát, és az így keletkezett nagy kockának mind a hat lapját befestettük pirosra. El tudunk-e venni

a) 2;
b) 6;
c) 10;
d) 15 darab - piros lappal is rendelkező - kis kockát úgy, hogy a maradék test felszíne ugyanakkora maradjon, mint az eredeti kockáé? Ha igen, hogyan?

(13 pont)

Megoldás:

(Nem változik a test felszíne, ha egy olyan téglatestet veszünk el, aminek pontosan egy közös csúcsa van a kockával, ennek megfelelően az oldalhossza kisebb a kockáénál. Ugyanis minden elvett lap helyett megjelenik a felszínen a téglatest szemközti lapja.)

a) Egy csúcsnál elvehetünk egy 1x1x2-es téglatestet.
Vagy: két csúcsnál elvehetünk 1-1 kockát. (Elég az egyiket leírni vagy lerajzolni.)
2 pont

b) Egy csúcsnál elvehetünk egy 1x3x2-as téglatestet.
Vagy: két csúcsnál elvehetünk egy-egy 1x1x3-as téglatestet, amik egymáshoz nem érintkeznek lappal.
Vagy: három csúcsnál elvehetünk egy-egy 1x1x2-es téglatestet, amik nem érintkeznek lappal.
Vagy: hat csúcsnál elvehetünk 1-1 kockát.
Stb. (Minden jó konstrukció elfogadható.) 3 pont

c) Egy csúcsnál elvehetünk egy 1x3x3-as téglatestet, és egy másiknál egy kockát, úgy, hogy ne érintkezzenek lappal.
Vagy: öt csúcsnál elvehetünk egy-egy 1x1x2-es téglatestet, amik nem érnek össze.
Stb. (Fontos annak a megmutatása/lerajzolása, hogy megoldható, hogy a testeknek nincs közös lapja.) 4 pont

d) Egy csúcsnál elvehetünk egy 1x3x3-as téglatestet, és egy másiknál egy 1x3x2-es téglatestet, úgy, hogy ne érintkezzenek lappal. Pl. egymással párhuzamos lapokról vesszük el.
Vagy: két párhuzamos lap egyikén elveszünk a szemközti csúcsoknál egy-egy 1x2x2-es, a másikon egy 1x2x2-es és egy 1x1x3-as téglatestet.
Vagy: két lapon egy-egy 1x2x3-as, és egy velük lappal nem érintkező 1x1x3-as téglatestet veszünk el.
Stb. 4 pont

Összesen: 13 pont

6. feladat. Két pozitív egész szám összege 2026. Ha a nagyobbat megfelezzük, és a kisebbet megduplázzuk, akkor a két új szám összege 2027 lesz. Mik lehettek az eredeti számok?
(14 pont)

Megoldás:

Készítsünk ábrát a feladathoz! Legyen két egyforma piros szakasz a nagyobb szám, mert azt a későbbiekben meg fogjuk felezni, a kék szakasz pedig legyen a kisebb szám.

2 pont

Rajzoljuk le, hogy mi történik, miután a nagyobb számot megfelezzük és a kisebb számot megduplázzuk, azaz egy piros szakaszt kékre cserélünk.

1 pont

A kisebb szám eggyel nagyobb, mint a nagyobb szám fele.

2 pont

Ha a nagyobb szám felére cseréljük ki a kisebb számot, akkor az érték 1-gyel csökken.

2 pont

2025 a nagyobb szám felének a háromszorosa. 2 pont

A nagyobb szám fele: $2025 : 3 = 675$ 1 pont

A nagyobb szám: $675 \cdot 2 = 1350$ 2 pont

A kisebb szám ekkor: $2026 - 1350 = 676$ 2 pont

Megjegyzés: ha a versenyző próbálgatással rátalál a megfelelő számpárra, de nem indokolja a megoldását, és azt sem, hogy csak ez az egyetlen megoldás létezik, akkor legfeljebb 5 pontot kap, 2-2 pontot a két szám megtalálására és 1 pontot a feltételek ellenőrzésére.

Összesen: 14 pont

Maximális pontszám: 60 pont